Dr. Rainer Wanke

Übungsblatt 3 mit Lösungen

25.03.2020

Aufgabe 1: Folgen

Handelt es sich um Nullfolgen?

(a) $a_n = \dfrac{n}{n^3 + n^2 + 1}$

(b) $a_n = \dfrac{n+1}{n-2}$

(c) $a_n = \dfrac{\sin^3 n + \cos n}{\sqrt{n}}$

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n}{n^3 + n^2 + 1} \simeq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \implies$ Nullfolge.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n+1}{n-2} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin^3 n + \cos n}{\sqrt{n}} \simeq \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\text{endliche Zahl}}{\sqrt{n}} = 0 \implies$ Nullfolge.

Aufgabe 2: Reihen

(a) Zeigen Sie, dass gilt $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion sowie den "kleinen Gauß" für die Summe über j auf der rechten Seite.

(b) Beweisen Sie die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

Lösung:

(a) Wir verwenden $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n\,(n+1)}{2}$ ("kleiner Gauß").

- Für $n = 1$ ist die Behauptung erfüllt: $\sum_{i=1}^{n=1} i^3 = 1^3 = 1$ und $\left(\sum_{j=1}^{n=1} j\right)^2 = 1^2 = 1$.
- Induktionsannahme: Die Behauptung sei für n erfüllt.
- Für $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n+1} j\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} j + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 + (n+1)^2 + 2\,(n+1)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 + (n^2 + 2n + 1) + 2\,(n+1)\,\frac{n\,(n+1)}{2} \qquad \text{(kleiner Gauß)} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 + (n^3 + 3n^3 + 3n + 1) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \qquad \text{Induktionsannahme!} \\
&= \sum_{i=1}^{n=1} i^3, \quad \text{was zu beweisen war.}
\end{aligned}$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = 0.$

Aufgabe 3: Grenzwerte

Bestimmen Sie:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3-3x^2+3}{3x^3-3x^2+4}$

(d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-3x^2+3}{3x^2-3x+4}$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-3x^2+3}{3x^4-3x^3+4}$

(f) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+5x^2-29x-105}{x^2-4x-21}$

Lösung:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

(b) $$\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5} = \lim_{x\to 25} \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}-5} = \lim_{x\to 25} (\sqrt{x}+5) = 10$$

(c) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-3x^2+3}{3x^3-3x^2+4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\cdot 2}{x^3\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

(d) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-3x^2+3}{3x^2-3x+4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\cdot 2}{x^2\cdot 3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{3} = \infty$$

(e) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3-3x^2+3}{3x^4-3x^3+4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(3-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} \simeq \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\cdot 2}{x^4\cdot 3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x} = 0$$

(f) $$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+5x^2-29x-105}{x^2-4x-21} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2+2x-35)}{(x+3)(x-7)}$$
$$= \lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-35}{x-7} = -\frac{16}{5}$$