Dr. Rainer Wanke **Übungsblatt 4 mit Lösungen** 26.03.2020

Aufgabe 1: Definitions- und Wertebereich

Was sind die (maximal möglichen) Definitions- und dazugehörigen Wertebereiche der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(b) $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

(c) $f(x) = e^{5x+3}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

Lösung:

(a) Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, Wertebereich $W = (0,1]$.

(b) Definitionsbereich $D = [-2, +\infty)$, Wertebereich $W = [-1, +\infty)$.

(c) Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, Wertebereich $W = (0, +\infty)$.

(d) Definitionsbereich $D := (-\infty,0]$, Wertebereich $W = [0,1)$.

Aufgabe 2: Definitionsbereich

Was sind die (maximal möglichen) Definitionsbereiche der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+x-6}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+5}$

(c) $f(x) = \log(x^2 - x)$

Lösung:

(a) $\mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$

(b) $(-\infty, -5) \cup (-5, -1] \cup [4, +\infty)$

(c) $(-\infty,0) \cup (1, +\infty)$

Aufgabe 3: Funktionen

Bestimmen Sie Nullstellen, Pole und Asymptoten folgender Funktionen und fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

(a) $y = 3x - 4$

(b) $y = x^3 - 2$

(c) $y = x^2 - 2x - 3$

(d) $y = -\dfrac{1}{x}$

(e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

(f) $y = \dfrac{1}{x} + x$

Lösung:

(a) Nullstelle $x_0 = \frac{4}{3}$, keine Pole.
Da die Funktion eine Gerade ist, ist sie selbst ihre eigene Asymptote.

(b) Nullstelle $x_0 = \sqrt[3]{2}$, keine Pole oder Asymptoten.

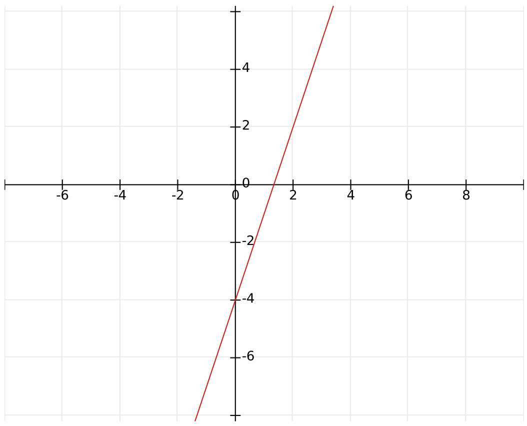
(c) Nullstellen $x_0 = -1 \vee x_0 = 3$, keine Pole oder Asymptoten.

(d) Keine Nullstellen, Pol bei $x = 0$ und Asymptote $y = 0$.

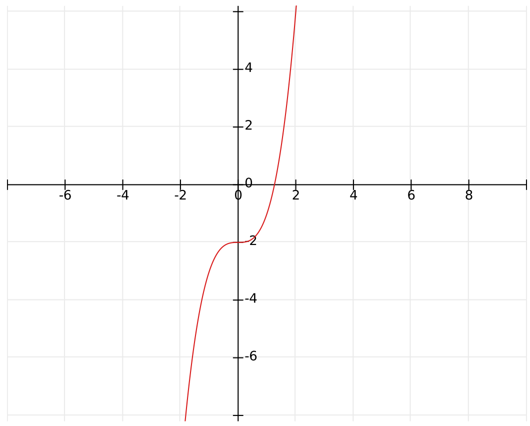
(e) Keine Nullstellen, keine Pole und Asymptoten $y = 0$.

(f) Keine Nullstellen, Pol bei $x = 0$ und Asymptote $y = x$.

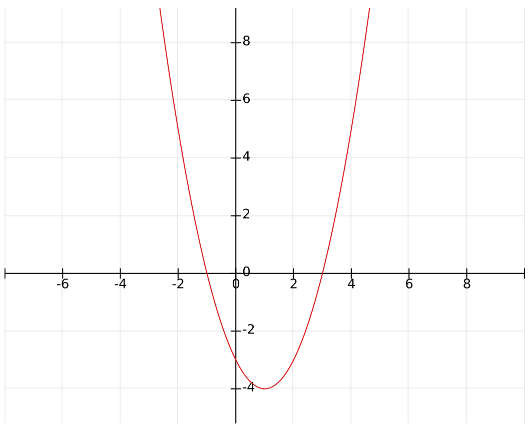
a)



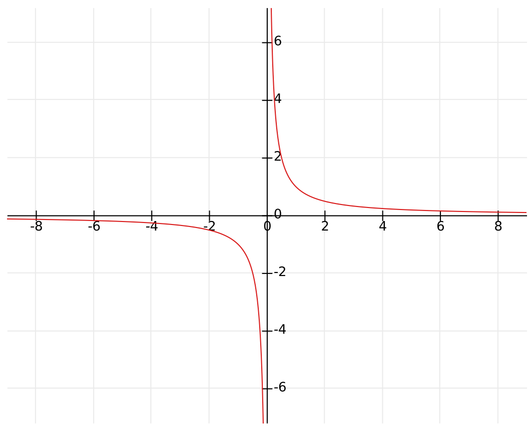
b)



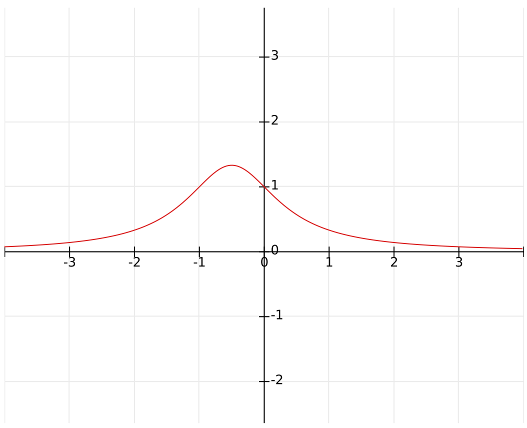
c)



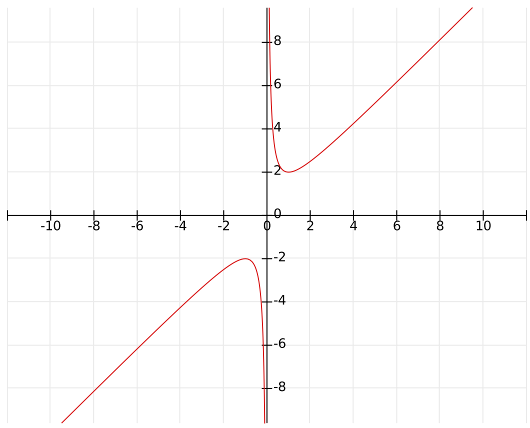
d)



e)



f)



(All plots with fooplot.com)

Aufgabe 4: Trigonometrische Funktionen

Zeichnen Sie die folgenden Funktionen und bestimmen Sie Nullstellen und Periode.

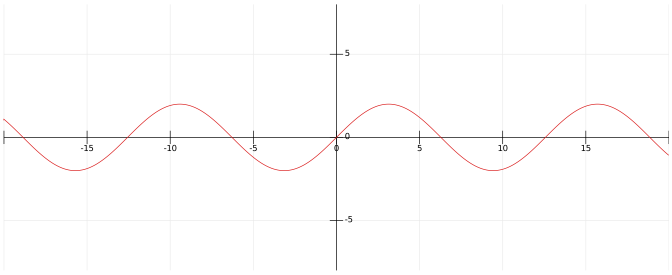
(a) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

(b) $f(x) = \sin\left(3x + \frac{1}{4}\right)$

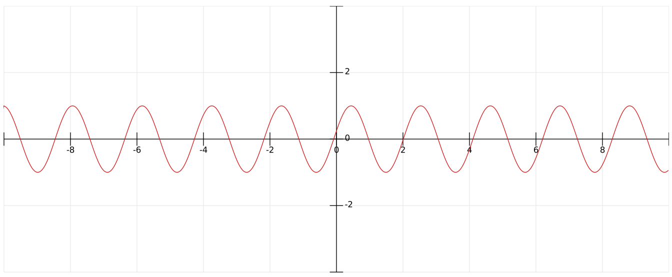
(c) $f(x) = \cos(4\pi x)$

Lösung:

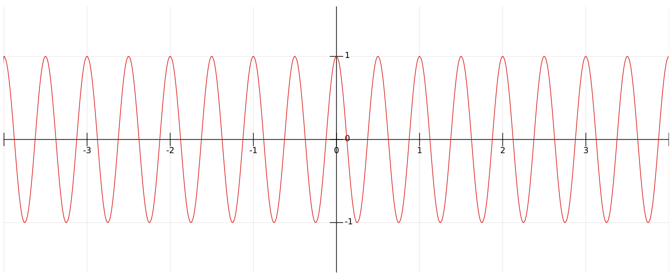
(a) Nullstellen: $x = 2n \cdot \pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
Periode: 4π.



(b) Nullstellen: $x = \frac{1}{3}\left(n\pi - \frac{1}{4}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
Periode: $\frac{2\pi}{3}$.



(c) Nullstellen: $x = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + n\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
Periode: $\frac{1}{2}$,



(All plots with fooplot.com)

Aufgabe 5: Mehr Trigonometrische Funktionen

Vervollständigen Sie die Tabelle mit Hilfe der trigonometrischen Formeln und den Werten $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cos\alpha$
0°	0	1		
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		
45°				
60°				
90°				
105°				
120°				
165°				
180°				
270°				
360°				

Lösung:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	∞	0
105°	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$	$-2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-2$
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
165°	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	$-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$	$-2+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}-2$
180°	0	-1	0	∞
270°	-1	0	∞	0
360°	0	1	0	∞

Aufgabe 6: Hyperbolische Funktionen

Beweisen Sie die folgende Relation für die Hyperbelfunktionen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x \;=\; 1.$$

Lösung:

Mit $\cosh x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ und $\sinh x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ erhält man

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x \;&=\; \tfrac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 \\ &=\; \tfrac{1}{4}\Big(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)\Big) \;=\; \tfrac{1}{4}\cdot 4 \;=\; 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Logarithmus und Exponentialfunktion

Vereinfachen oder berechnen Sie:

(a) $\log_2 8$

(b) $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$

(c) $\ln(b^5) + \ln\left(\frac{1}{b^5}\right)$

(d) $\ln(x^a) + \ln(x^b)$

(e) $\ln(b^x) + \ln(a^x)$

(f) $(\log_b a)(\log_a b)$

(g) $\ln(e) + e^{\ln(1)}$

(h) $\frac{e^{-3} \cdot e^4}{e^{-1}}$

(i) $e^{\ln(e^2)}$

(j) $2\ln(e^3) + \ln\frac{1}{e^6}$

Lösung:

(a) $\log_2 2^3 \;=\; 3$

(b) $\ln e^{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{3}{2}$

(c) $5\ln b - 5\ln b \;=\; 0$

(d) $\ln x^a x^b \;=\; \ln x^{a+b} \;=\; (a+b)\ln x$

(e) $x\ln b + x\ln a \;=\; x\ln ab$

(f) $\frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} \;=\; 1$

(g) $1 + e^0 \;=\; 1 + 1 \;=\; 2$

(h) $\frac{e^{-3+4}}{e^{-1}} \;=\; e^{1-(-1)} \;=\; e^2$

(i) $e^{2\ln e} \;=\; e^2$

(j) $2 \cdot 3\ln e + (-6)\ln e \;=\; 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \;=\; 0$

Aufgabe 8: Umkehrfunktion

Bilden Sie die Umkehrfunktion folgender Funktionen und geben Sie deren Definitions- und Wertebereiche an:

(a) $f(x) = 3x - 5$

(b) $f(x) = \ln(2x)$

(c) $f(x) = 2x^3 + 2$

(d) $f(x) = \sin x - 2$

Lösung:

(a) $g(y) = \frac{y+5}{3}$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W : \mathbb{R}$.

(b) $g(y) = \frac{e^y}{2}$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W = (0, +\infty)$.

(c) $g(y) = \sqrt[3]{\frac{y-2}{2}}$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W = \mathbb{R}$.

(d) $g(y) = \arcsin(y + 2)$

Definitionsbereich $D = [-3,1]$ und Wertebereich $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.