Dr. Rainer Wanke

Übungsblatt 5 mit Lösungen

27.03.2020

Aufgabe 1: Ableitung

Bestimmen Sie die Ableitung nach x der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{5x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

(e) $f(x) = \ln(x + 1)$

(f) $f(x) = a \sin(bx + c)$

Lösung:

(a) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{5} \cdot \left[\dfrac{(3x^2 - 2)\, x^2 - (x^3 - 2x)\, 2x}{x^4} \right] = \dfrac{x^4 + 2x^2}{5x^4}$

(c) $f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{\left(\frac{1}{3} - 1\right)} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(d) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(e) $f'(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

(f) $f'(x) = a\, b \cos(bx + c)$

Aufgabe 2: Kritische Punkte

Bestimmen Sie die Nullstellen und Extremwerte folgender Funktionen.

(a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2$

(b) $f(x) = 2 + \frac{1}{2}x^3$

(c) $f(x) = 2\cos(x+2)$

(d) $f(x) = 3\sin x$

Lösung:

(a) Nullstellen: $f(x) = 2x^4 - 8x^2 = 0 \implies x = 0 \vee x = \pm 2.$

Extremwerte: $f'(x) = 8x^3 - 16x = 0 \implies x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}.$

$$f''(x) = 24x^2 - 16 = \begin{cases} -16 < 0, & x = 0 \\ 32 > 0, & x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$\implies$ $x = 0$ ist Maximum und $x = \pm\sqrt{2}$ ist Minimum.

(b) Nullstellen: $f(x) = 2 + \frac{1}{2}x^3 = 0 \implies x = -\sqrt[3]{4}.$

Extremwerte: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 = 0 \implies x = 0.$

$f''(x) = 3x = 0$ und $f'''(x) = 3 > 0$

$\implies$ $x = 0$ ist Sattelpunkt.

(c) Nullstellen: $f(x) = 2\cos(x+2) = 0 \implies x = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Extremwerte: $f'(x) = -2\sin(x+2) = 0 \implies x = n\pi - 2$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$$f''(x) = -2\cos(x+2) = -2\cos(n\pi) = \begin{cases} -2 > 0, & n \text{ gerade} \\ +2 < 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\implies$ Maximum für gerade und Minimum für ungerade n.

(d) Nullstellen: $f(x) = 3\sin x = 0 \implies x = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Extremwerte: $f'(x) = 3\cos x = 0 \implies x = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$$f''(x) = -3\sin x = -3\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{cases} -3 > 0, & n \text{ gerade} \\ +3 < 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\implies$ Maximum für gerade und Minimum für ungerade n.

Aufgabe 3: Differential

Schreiben Sie das Differential folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \sin x \cos x$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{x}}$

Lösung:

(a) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos(2x) \implies \mathrm{d}f = \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

(b) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(n-m)}{mn} x^{\frac{(n-m)}{mn}-1} = \dfrac{(n-m)}{mn} \dfrac{x^{\frac{n-m}{mn}}}{x} \implies \mathrm{d}f = \dfrac{(n-m)}{mn} \dfrac{x^{\frac{n-m}{mn}}}{x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 4: Ableitung der Umkehrfunktion

Leiten Sie die Areasinus- und Areatangens-Funktionen ab. Verwenden Sie die Regel für die Ableitung von Umkehrfunktionen.
Hinweis: Diese Regel ergibt sich unter Beachtung der Kettenregel für Ableitungen aus $y = f(f^{-1}(y))$.

Lösung:

(a) $g(y) = \operatorname{arsinh} y \implies f(x) = \sinh x$ mit $f'(x) = \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$

$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\sinh x}{\mathrm{d}x}\big|_{g(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh} y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

(b) $g(y) = \operatorname{artanh} y \implies f(x) = \tanh(x)$ mit $f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2 x$

$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\tanh x}{\mathrm{d}x}\big|_{g(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh} y)}} = \frac{1}{1-y^2}$$

Aufgabe 5: Mehr Grenzwerte

Bestimmen Sie

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+3x^4}{e^x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin 3x}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 5x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x}$

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+3x^4}{e^x-1} = \dfrac{\infty}{\infty}$. De l'Hôpital 4mal $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+3x^4}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{120}{e^x} = 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{0}{0}$. De l'Hôpital $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{-\frac{3}{2}}}{(x-2)^{-\frac{3}{2}}} = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{0}$. De l'Hôpital $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^2}{2} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\text{endliche Zahl}}{x} = 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = \dfrac{\infty}{\infty}$. De l'Hôpital 2 mal $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{\cos 2x} = 1$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 5x} = \dfrac{0}{0}$. De l'Hôpital $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}+2e^{-2x}}{5\cos 5x} = \dfrac{4}{5}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x} = \dfrac{0}{0}$

De l'Hôpital 2 mal $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+3x-\sqrt{(1+2x)^3}}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{3}{\sqrt{1+2x}}}{2\cos x - x\sin x} = -\dfrac{3}{2}$