Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ bzw. $t_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Geben Sie jeweils die ersten 4 Glieder dieser Reihen an.

(a) $f(x) = \sqrt{1-x}$

(b) $f(x) = \sin(x+a)$
Überprüfen Sie, dass die Entwicklung dasselbe Ergebnis liefert wie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

(c) $f(t) = \sin(\omega t + \pi)$

(d) $f(x) = \ln(1+x)$

(e) $f(x) = \ln\left[(1+x)^5\right]$

Aufgabe 2: Schnittpunkte und Nullstellen mit Taylor

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = 2\sin x$ im ersten Quadranten, indem Sie beide Funktionen um $x = 0$ durch ein Polynom 3. Grades annähern.

(b) Bestimmen Sie eine Nullstelle von $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1$. Starten Sie vom Schätzwert $x_1 = 1$ und wiederholen Sie das Verfahren höchstens dreimal.

Aufgabe 3: Physikalisches Beispiel

Die barometrische Höhenformel gibt den Luftdruck $p(h)$ als Funktion der Höhe h an. Sie ist gegeben durch $p(h) = p(0)\, e^{-\alpha h}$, mit $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\mathrm{m}}$. Wie groß ist der Druck $p(30\,\mathrm{m})$ in 30 m Höhe, wenn der Luftdruck auf Meereshöhe $p(0) = 1\,000\,\mathrm{hPa}$ beträgt?

Aufgabe 4: Mehr Taylor-Entwicklungen

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um 0 in eine Taylorreihe. Geben Sie jeweils die ersten 4 Glieder dieser Reihen an:

(a) $f(t) = e^{-at}$

(b) $f(b) = \cos b$

(c) $f(u) = \sinh u$