Übungsblatt 6 mit Lösungen

Aufgabe 1: Taylor-Entwicklung

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$ bzw. $t_0 = 0$ in eine Taylorreihe. Geben Sie jeweils die ersten 4 Glieder dieser Reihen an.

(a) $f(x) = \sqrt{1-x}$

(b) $f(x) = \sin(x+a)$
Überprüfen Sie, dass die Entwicklung dasselbe Ergebnis liefert wie die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

(c) $f(t) = \sin(\omega t + \pi)$

(d) $f(x) = \ln(1+x)$

(e) $f(x) = \ln\left[(1+x)^5\right]$

Lösung:

Die Koeffizienten der ersten 4 Terme sind $\frac{1}{0!} = 1$, $\frac{1}{1!} = 1$, $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

(a)
$$f(x) = \sqrt{1-x} \implies f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \implies f'(0) = -\frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{(1-x)^{-3/2}}{4} \implies f''(0) = -\frac{1}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{-3\,(1-x)^{-5/2}}{8} \implies f'''(0) = -\frac{3}{8}$$
$$\implies f(x) \simeq 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 + O(x^4).$$

(b)
$$f(x) = \sin(x+a) \implies f(0) = \sin a$$
$$f'(x) = \cos(x+a) \implies f'(0) = \cos a$$
$$f''(x) = -\sin(x+a) \implies f''(0) = -\sin a$$
$$f'''(x) = -\cos(x+a) \implies f'''(0) = -\cos a$$
$$\implies f(x) \simeq \sin a + x\,\cos a - \tfrac{1}{2}x^2\sin a - \tfrac{1}{6}x^3\cos a + O(x^4)$$

Mit den Additionstheoremen erhält man:
$$f(x) = \sin(x+a) = \sin x\cos a + \cos x\sin a \implies f(0) = \sin a$$
$$f'(x) = \cos x\sin a - \sin x\sin a \implies f'(0) = \cos a$$
$$f''(x) = -\sin x\cos a - \cos x\sin a \implies f''(0) = -\sin a$$
$$f'''(x) = -\cos x\cos a + \sin x\sin a \implies f'''(0) = -\cos a$$
$$\implies f(x) \simeq \sin a + x\,\cos a - \tfrac{1}{2}x^2\sin a - \tfrac{1}{6}x^3\cos a + O(x^4)$$

(c) $f(t) = \sin(\omega t + \pi) \implies f(0) = 0$

$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \pi) \implies f'(0) = -\omega$

$f''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t + \pi) \implies f''(0) = 0$

$f'''(t) = -\omega^3 \cos(\omega t + \pi) \implies f'''(0) = \omega^3$

$\implies f(x) \simeq -\omega t + \frac{1}{6}\omega^3 t^3 + O(t^5).$

(d) $f(x) = \ln(1+x) \implies f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = 2$$

$\implies f(x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^4).$

(e) $f(x) = \ln\left[(1+x)^5\right] \implies f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{5}{(1+x)} \implies f'(0) = 5$$

$$f''(x) = -\frac{5}{(1+x)^2} \implies f''(0) = -5$$

$$f'''(x) = \frac{10}{(1+x)^3} \implies f'''(0) = 10$$

$\implies f(x) \simeq 5x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + O(x^4).$

Aufgabe 2: Schnittpunkte und Nullstellen mit Taylor

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g(x) = 2\sin x$ im ersten Quadranten, indem Sie beide Funktionen um $x = 0$ durch ein Polynom 3. Grades annähern.

(b) Bestimmen Sie eine Nullstelle von $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1$. Starten Sie vom Schätzwert $x_1 = 1$ und wiederholen Sie das Verfahren höchstens dreimal.

Lösung:

(a) Die Taylorentwicklung ergibt
$f(x) = e^x - 1 \simeq x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ und
$g(x) = 2\sin x \simeq 2x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^4)$.

Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \implies x = 0 \vee x = 1 \vee x = -2$.

Davon liegt nur $x = 1$ im ersten Quadranten, der gesuchte Schnittpunkt ist also $\{1;\ f(1)\} = \left\{1;\ \frac{5}{3}\right\}$.

(b) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 1$ mit $f(x_1 = 1) = 1$ und $f'(x_1 = 1) = 5$.

Iteration der Nullstelle:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \implies f(x_2) = 0{,}2045,\ f'(x_2) = 3{,}112$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}7343 \implies f(x_3) = 0{,}0149,\ f'(x_3) = 2{,}670$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0{,}7287 \implies f(x_4) = 0{,}0001.$$

Aufgabe 3: Physikalisches Beispiel

Die barometrische Höhenformel gibt den Luftdruck $p(h)$ als Funktion der Höhe h an. Sie ist gegeben durch $p(h) = p(0)\,e^{-\alpha h}$, mit $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\,\frac{1}{\mathrm{m}}$. Wie groß ist der Druck $p(30\,\mathrm{m})$ in 30 m Höhe, wenn der Luftdruck auf Meereshöhe $p(0) = 1\,000\,\mathrm{hPa}$ beträgt?

Lösung:

Die Taylor-Entwicklung um $h = 0$ ergibt mit $x = 30\,\mathrm{m}$ und $\alpha \cdot 30\,\mathrm{m} = 3{,}75 \cdot 10^{-3}$:

$$\begin{aligned}
p(h) &\simeq p(0) - \alpha\, p(0)\, x + \frac{\alpha^2 p(0)}{2} x^2 - \frac{\alpha^3 p(0)}{6} x^3 + O\left(x^4\right) \\
&= 1\,000\,\mathrm{hPa} \cdot \left(1 - \alpha\, x + \tfrac{1}{2}\alpha^2 x^2 - \tfrac{1}{6}\alpha^3 x^3 + O\left(\alpha^2 x^4\right)\right) \\
&= 1\,000\,\mathrm{hPa} \cdot \left(1 - 3{,}75 \cdot 10^{-3} + \tfrac{1}{2}(3{,}75 \cdot 10^{-3})^2 - \tfrac{1}{6}(3{,}75 \cdot 10^{-3})^3 + O\left(10^{-12}\right)\right) \\
&= 1\,000\,\mathrm{hPa} \cdot 0{,}99625 \;=\; 996{,}250\,\mathrm{hPa}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Mehr Taylor-Entwicklungen

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen um 0 in eine Taylorreihe. Geben Sie jeweils die ersten 4 Glieder dieser Reihen an:

(a) $f(t) = e^{-at}$

(b) $f(b) = \cos b$

(c) $f(u) = \sinh u$

Lösung:

Die Koeffizienten der ersten 4 Terme sind $\frac{1}{0!} = 1$, $\frac{1}{1!} = 1$, $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

(a)
$$f(t) = e^{-at} \implies f(0) = 1$$
$$f'(t) = -a\,e^{-at} \implies f'(0) = -a$$
$$f''(t) = a^2 e^{-at} \implies f''(0) = a^2$$
$$f'''(t) = -a^3 e^{-at} \implies f'''(0) = -a^3$$
$$\implies f(t) \simeq 1 - at - \tfrac{1}{2}a^2t^2 - \tfrac{1}{6}a^3t^3 + O(t^4)$$

(b)
$$f(0) = 1$$
$$f'(b) = -\sin b \implies f'(0) = 0$$
$$f''(b) = -\cos b \implies f''(0) = -1$$
$$f'''(b) = \sin b \implies f'''(0) = 0$$
$$\implies f(b) \simeq 1 - \tfrac{1}{2}b^2 + O(b^4)$$

(c)
$$f(0) = 0$$
$$f'(u) = \cosh u \implies f'(0) = 1$$
$$f''(u) = \sinh u \implies f''(0) = 0$$
$$f'''(u) = \cosh u \implies f'''(0) = 1$$
$$\implies f(u) \simeq u - \tfrac{1}{6}u^3 + O(u^5)$$