

**Aufgabe 1: Stammfunktionen**

Bestimmen Sie die Stammfunktion  $F(x)$  zu  $f(x)$ , die die angegebenen Randbedingungen erfüllt:

(a)  $f(x) = 3x$  mit  $F(1) = 2$

(b)  $f(x) = 3x$  mit  $F(0) = 0$

(c)  $f(x) = 2x + 3$  mit  $F(1) = 0$

(d)  $f(x) = \cos x$  mit  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

(e)  $f(x) = 6x^2 + 5x$  mit  $F(1) = 0$

**Aufgabe 2: Unbestimmte Integrale**

Berechnen Sie die Stammfunktionen folgender unbestimmter Integrale:

(a)  $\int x^4 dx$

(b)  $\int e^{2x} dx$

(c)  $\int \sin 5x dx$

(d)  $\int \tan x dx$

(e)  $\int \sinh^2 x dx$

(f)  $\int x e^{2x} dx$

(g)  $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$

**Aufgabe 3: Bestimmte Integrale**

Berechnen Sie:

(a)  $\int_0^{\pi/2} 3 \cos x \, dx$

(b)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos x \, dx$

(c)  $\int_3^3 x^4 \, dx$

(d)  $\int_3^0 x^2 \, dx$

(e)  $\int_0^1 (5x - 4)^3 \, dx$

(f)  $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{2x^3 + 4} \, dx$

**Aufgabe 4: Uneigentliche Integrale**

Berechnen Sie:

(a) 
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

(b) 
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

**Aufgabe 5: Anwendungsbeispiel**

Im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers der Masse  $M$  ist die Gravitationskraft  $F$ , die auf einen Körper der Masse  $m$  wirkt, der sich im Abstand  $x$  vom Mittelpunkt des Himmelskörpers befindet, gegeben durch  $F = G \frac{Mm}{x^2}$  mit der Gravitationskonstante  $G$ .

Damit ist die Arbeit, um die Masse  $m$  gegen die Anziehungskraft  $F$  um ein kleines Stück  $dx$  vom Himmelskörper weg zu bewegen:

$$dW = F dx = G \frac{Mm}{x^2} dx.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper von der Entfernung  $x_0$  ganz aus dem Feld zu entfernen ( $x_1 \rightarrow \infty$ ).