Übungsblatt 7 mit Lösungen

Aufgabe 1: Stammfunktionen

Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$, die die angegebenen Randbedingungen erfüllt:

(a) $f(x) = 3x$ mit $F(1) = 2$

(b) $f(x) = 3x$ mit $F(0) = 0$

(c) $f(x) = 2x + 3$ mit $F(1) = 0$

(d) $f(x) = \cos x$ mit $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

(e) $f(x) = 6x^2 + 5x$ mit $F(1) = 0$

Lösung:

(a) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$ mit $F(1) = 2 \Longrightarrow c = \frac{1}{2} \Longrightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

(b) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$ mit $F(0) = 0 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2$.

(c) $F(x) = x^2 + 3x + c$ mit $F(1) = 0 \Longrightarrow c = -4 \Longrightarrow F(x) = x^2 + 3x - 4$.

(d) $F(x) = \sin x + c$ mit $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \Longrightarrow c = 4 \Longrightarrow F(x) = 4 + \sin x$.

(e) $F(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c$ mit $F(1) = 0 \Longrightarrow c = -\frac{9}{2} \Longrightarrow F(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}$

Aufgabe 2: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die Stammfunktionen folgender unbestimmter Integrale:

(a) $\int x^4 \, \mathrm{d}x$

(b) $\int e^{2x} \, \mathrm{d}x$

(c) $\int \sin 5x \, \mathrm{d}x$

(d) $\int \tan x \, \mathrm{d}x$

(e) $\int \sinh^2 x \, \mathrm{d}x$

(f) $\int x\, e^{2x} \, \mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{x}{x^2-1} \, \mathrm{d}x$

Lösung:

(a) $F(x) = \frac{1}{5} x^5 + c$

(b) $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c$ (Substitutionsregel mit $g(t) = 2t$.)

(c) $F(x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$ (Substitutionsregel mit $g(t) = 5t$.)

(d) $F(x) = -\ln|\cos x| + c$ (Tabelle aus der Vorlesung oder logarithmische Integration mit $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x$.)

(e) $F(x) = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x) + c$
(Partielle Integration mit $u(x) = \sinh x$, $v(x) = \cosh x$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.)

(f) $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + c$ (Partielle Integration mit $u(x) = x$, $v(x) = e^{2x}$.)

(g) $F(x) = \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + c$ (Logarithmische Integration mit $f(x) = x^2-1$, $f'(x) = 2x$.)

Aufgabe 3: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie:

(a) $\int_0^{\pi/2} 3\cos x \; \mathrm{d}x$

(b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \; \mathrm{d}x$

(c) $\int_3^{3} x^4 \; \mathrm{d}x$

(d) $\int_3^{0} x^2 \; \mathrm{d}x$

(e) $\int_0^{1} (5x-4)^3 \; \mathrm{d}x$

(f) $\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{2x^3+4} \; \mathrm{d}x$

Lösung:

(a) $\int_0^{\pi/2} 3\cos x \; \mathrm{d}x \;=\; [3\sin x]_0^{\pi/2} \;=\; 3.$

(b) $\int_0^{\pi/2} 3\cos x \; \mathrm{d}x \;=\; [3\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} \;=\; 6.$

(c) $\int_3^{3} x^4 \; \mathrm{d}x \;=\; 0.$

(d) $\int_3^{0} x^2 \; \mathrm{d}x \;=\; \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_3^0 \;=\; -9.$

(e) $\int_0^{1} (5x-4)^3 \; \mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{20}\left[(5x-4)^4\right]_0^1 \;=\; -\frac{51}{4}.$

(f) $\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{2x^3+4} \; \mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{9}\left[(2x^3+4)^{3/2}\right]_{-1}^1 \;=\; \frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{9}.$

Aufgabe 4: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie:

(a) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

(b) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$

Lösung:

(a) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t}+1\right) \;=\; 1.$

(b) $\lim\limits_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x} \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} \left[\ln|x|\right]_1^t \;=\; \lim\limits_{t\to\infty} \ln|t| \;=\; \infty$, d.h. das Integral existiert nicht.

Aufgabe 5: Anwendungsbeispiel

Im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers der Masse M ist die Gravitationskraft F, die auf einen Körper der Masse m wirkt, der sich im Abstand x vom Mittelpunkt des Himmelskörpers befindet,gegeben durch $F = G\,\frac{M\,m}{x^2}$ mit der Gravitationskonstante G.

Damit ist die Arbeit, um die Masse m gegen die Anziehungskraft F um ein kleines Stück $\mathrm{d}x$ vom Himmelskörper weg zu bewegen:

$$\mathrm{d}W \;=\; F\,\mathrm{d}x \;=\; G\,\frac{M\,m}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper von der Entfernung x_0 ganz aus dem Feld zu entfernen ($x_1 \to \infty$).

Lösung:

$$W \;=\; \int_{x_0}^\infty \mathrm{d}W \;=\; \lim_{x_1\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{d}W \;=\; \lim_{x_1\to\infty} \int_{x_0}^{x_1} G\,\frac{M\,m}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; G\,M\,m \cdot \lim_{x_1\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$=\; G\,M\,m \cdot \lim_{x_1\to\infty} \left(-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_0}\right) \;=\; \frac{G\,M\,m}{x_0}.$$