Übungsblatt 8 mit Lösungen

Aufgabe 1: Konjugierte komplexe Zahl

Bestimmen Sie die zu z konjugierte Zahl $z^\star$ für

(a) $z = 5 + 2\,\mathrm{i}$

(b) $z = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Lösung:

(a) $z^\star = 5 - 2\,\mathrm{i}$

(b) $z^\star = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,i$

Aufgabe 2: Lösungen von quadratischen Gleichungen

Berechnen Sie die Lösungen folgender quadratischer Gleichungen.

(a) $x^2 + 4x + 13 = 0$

(b) $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{25}{16} = 0$

Lösung:

Verwende die "pq-Formel" zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

(a) $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot 4 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} = -2 \pm 3\,\mathrm{i}.$

(b) $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{16}{16}} = -2 \pm \mathrm{i}.$

Aufgabe 3: Operationen mit komplexen Zahlen

Bestimmen Sie:

(a) $w = z_1 - z_2 + z_3^*$ mit $z_1 = 5 - 2\,\mathrm{i}$, $z_2 = 2 - 3\,\mathrm{i}$ und $z_3 = -4 + 6\,\mathrm{i}$.

(b) $w = z_1\,z_2$ mit $z_1 = 3 - 2\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 5 + 4\,\mathrm{i}$.

(c) $w = z_1\,z_2$ mit $z_1 = 2\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$ und $z_2 = \frac{1}{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

(d) $w = \dfrac{z_1^*}{z_2}$ mit $z_1 = \frac{1}{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$ und $z_2 = \frac{3}{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$.

(e) $w = z^5$ mit $z = 2e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$.

Lösung:

(a) $w = -1 - 5\,\mathrm{i}$.

(b) $w = 23 + 2\,\mathrm{i}$.

(c) $w = 2\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\,\pi} = -1$.

(d) $w = \dfrac{\frac{1}{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}}{\frac{3}{2}\,e^{-\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{3}\,e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{3}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{i}$.

(e) $w = 2^5\,e^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{2}} = 32\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = 32\,\mathrm{i}$.

Aufgabe 4: Darstellung und Umformung komplexer Zahlen

Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in trigonometrischer und exponentieller Form:

(a) $z = \mathrm{i}$

(b) $z = -1$

(c) $z = 1 + \mathrm{i}$

(d) $z = \mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i})$

(e) $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$

(f) $z = \sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha$

Lösung:

(a) $z = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$

(b) $z = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = e^{\mathrm{i}\,\pi}$

(c) $z = \sqrt{2}\,\left[\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$

(d) $z = \sqrt{2}\,\left[\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}$

(e) $z = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$

(f) $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = e^{\mathrm{i}\,\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

Aufgabe 5: Mehr Darstellung und Umformung komplexer Zahlen

Formen Sie die folgenden komplexen Zahlen in algebraische Notation um und zeichnen Sie sie und die jeweiligen komplex konjugierten Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene.

(a) $z = 5\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) $z = 3\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

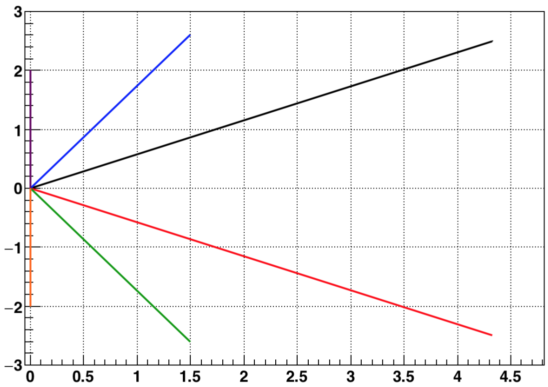
(c) $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

Lösung:

(a) $z = 5\,e^{i\frac{\pi}{3}} = 5\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2}\,i$ und $z^\star = \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\,i$

(b) $z = 3\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = 3\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ und $z^\star = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$

(c) $z = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] = 2\,i$ und $z^\star = -2\,i$



Aufgabe 6: Komplexe Exponenten

Sei $z(t) = at + \mathrm{i}\,bt$ mit $0 \leq t \leq \infty$.

(a) Wie lautet der Realteil Re$(w(t))$ von $w(t) = e^{z(t)}$?

(b) Wie groß ist die Periode T (also eine Schwingungsdauer) von Re$(w(t))$?

(c) Welche Auslenkung hat die Funktion $w(t)$ zur Zeit $t = 2$?
Setzen Sie $a = -1$ und $b = 2\pi$ ein.

Lösung:

(a) Re$(w(t)) = e^{at} \cos bt$

(b) $T = \dfrac{2\pi}{b}$

(c) $w(2) = e^{2a} (\cos 2b + \mathrm{i} \sin 2b)$ mit $a = -1$ und $b = 2\pi$

$\Longrightarrow \quad w(2) = e^{-2} [\cos(4\pi) + \mathrm{i} \sin(4\pi)] = e^{-2}$.