Dr. Rainer Wanke **Übungsblatt 9 mit Lösungen** 02.04.2020

Aufgabe 1: Rechnen mit Matrizen

Addieren und multiplizieren Sie (wenn möglich) folgende Matrizenpaare:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) Berechnen Sie $A^T B$ und $A B^T$ mit den Matrizen von Aufgabe (b).

Lösung:

(a) $A + B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

(b) $A + B = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ -2 \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix},$ $A B$ nicht möglich.

(c) $A + B$ nicht möglich, $A B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -1 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) $A^T B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} \simeq$ 5,56.

$$A B^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & 1 & -1 \\ 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Determinanten

Berechnen Sie die folgenden Determinanten mit so wenig Aufwand wie möglich:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Lösung:

(a) Wenn man rekursiv vorgeht und mit der ersten Zeile anfängt, erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (-3+6) - 3 \cdot (-1+6) + 5 \cdot (-3+9) \\ &= 12 - 15 + 30 \\ &= 27. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Aufgabe (a)}}{=} -1 \cdot 27 = -27.$$

Aufgabe 3: Inverse Matrix

Bestimmen Sie die inversen Matrizen zu den folgenden Matrizen und überprüfen Sie die Ergebnisse:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (siehe Aufgabe 2(a)).

(b) $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Determinante $|A| = 27$ aus Aufgabe 2(a) erhält man über die Formel $(a^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i-j}\,|A_{ji}|}{|A|}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 \\ -5 & -11 & 3 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

(b) Ebenfalls mit der Formel $(a^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i-j}\,|A_{ji}|}{|A|}$ und der Determinante $|A| = \cos^2\phi - (-\sin^2\phi) = 1$ erhält man:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T.$$

Das muss natürich so sein, da eine Drehung um den Winkel ϕ um die z-Achse gerade durch eine Drehung um den Winkel $-\phi$ aufgehoben wird.

Zur Probe überprüft man jeweils, ob $A^{-1}A = \mathbb{1}$.

Aufgabe 4: Diagonalmatrizen

Seien A und B zwei $(n \times n)$-Diagonalmatrizen mit Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & \alpha_2 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & \beta_2 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie:

(a) $A \cdot B$

(b) $[A,B]$

(c) A^{-1}

Lösung:

(a) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & \alpha_2 + \beta_2 & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

(b) $[A,B] = AB - BA = 0.$

(c) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & 0 & ... & ... \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$