# Übungsblatt 10 mit Lösungen



## Aufgabe 1: Lineare Gleichungssysteme:

(a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

(b) Das folgende Gleichungssystem kann zumindest teilweise gelöst werden. Eliminieren Sie drei der Variablen, so dass nur eine unbestimmt bleibt.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 4 \\ a_1 - a_2 + a_4 &= 4 \\ -a_3 + a_4 &= 2 \end{aligned}$$

(c) Betrachten Sie folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 4 \\ b_1 + b_2 + b_4 &= 5 \\ b_3 + b_4 &= 5 \end{aligned}$$

Begründen Sie, warum entweder $b_1$ oder $b_2$ unbestimmt bleiben müssen.

**Lösung:**

(a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 9 \quad (1) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \quad (2) \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \quad (3) \end{aligned}$$

$2 \cdot (2) - (1) \implies x_2 + 5x_3 = 3 \implies x_2 = 3 - 5x_3$

$3 \cdot (2) - (3) \implies 5x_2 + 7x_3 = 10 \implies 15 - 25x_3 + 7x_3 = 10 \implies x_3 = \frac{5}{18},\ x_2 = \frac{29}{18}.$

$(1) \implies 2x_1 + 3 \cdot \frac{29}{18} + \frac{5}{18} = 9 \implies 2x_1 + \frac{92}{18} = \frac{162}{18} \implies x_1 = \frac{35}{18}.$

(b)
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 4 \quad (1) \\ a_1 - a_2 + a_4 &= 4 \quad (2) \\ -a_3 + a_4 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

$(3) \implies a_4 = 2 + a_3$

$(2) \implies a_1 - a_2 + a_3 = 2$

$(1) - (2) \implies a_2 = 1$

$\implies a_1 = 3 - a_3,\quad a_2 = 1,\quad a_3 =$ unbestimmt, $\quad a_4 = a_3 + 2.$

(c)
$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 4 \quad (1) \\ b_1 + b_2 + b_4 &= 5 \quad (2) \\ b_3 + b_4 &= 5 \quad (3) \end{aligned}$$

$(3) \implies b_3 = 5 - b_4$

$(1) - (2) \implies b_4 = 3$ und $b_3 = 2$

$\implies b_1 =$ unbestimmt, $\quad b_2 = 2 - b_1,\quad b_3 = 2,\quad b_4 = 3.$

## Aufgabe 2: Drehmatrix

(a) Wie lautet die Drehmatrix $D$ für eine 45°-Drehung um die $z$-Achse im dreidimensionalen Raum?

(b) Wie transformiert sich der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter Anwendung von $D$?

**Lösung:**

(a) Die allgemeine Drehmatrix einer Drehung um die $z$-Achse lautet

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für eine Drehung von 45° ist $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und damit

$$D = \begin{pmatrix} \cos 45° & \sin 45° & 0 \\ -\sin 45° & \cos 45° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Der transformierte Vektor ist

$$\vec{a}' = D\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 0 \\ 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 3: Mehr Drehmatrizen

(a) Wie lautet die Drehmatrix $D$ für die Kombination einer 90°-Drehung um die $z$-Achse mit einer nachfolgenden 90°-Drehung um die $x$-Achse? Wie transformiert sich der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter Anwendung von $D$?

(b) Wie lautet die Drehmatrix $D$ für die umgekehrte Kombination einer 90°-Drehung um die $x$-Achse mit einer nachfolgenden 90°-Drehung um die $z$-Achse? Wie transformiert sich der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ diesmal?

(c) Überprüfen Sie, dass $\vec{a}$ unter beiden Transformationen den Betrag nicht ändert.

**Lösung:**

(a) Mit $\sin 90° = 0$ und $\cos 90° = 1$ ist die 90°-Drehung um die $z$-Achse (s. Aufg. 2):

$$D_z = \begin{pmatrix} \cos 90° & \sin 90° & 0 \\ -\sin 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

90°-Drehung um die $x$-Achse: $D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90° & \sin 90° \\ 0 & -\sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Kombinierte Drehung: $D = D_x \cdot D_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Transformation: $\vec{x}' = D\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ und $\vec{a}' = D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) Kombinierte Drehung: $D = D_z \cdot D_x$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transformation: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$ und $\vec{a}' = D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(c) In beiden Fällen ist der Betrag $|\vec{a}'| = \sqrt{2}$.