

Aufgabe 1: Flächen- und Volumenintegrale

Bestimmen Sie die Fläche \mathcal{F} zwischen den Kurven $y = x^4$ und $y = 2x^2 + 8$

(a) als Flächenintegral.

(b) als Differenz zweier eindimensionaler Integrale.

(c) Berechnen Sie das Volumen zwischen der Fläche \mathcal{F} und der Funktion $f(x,y) = x + y$.

Aufgabe 2: Mehr Flächen- und Volumenintegrale

Bestimmen Sie die Fläche \mathcal{F} zwischen den Kurven $y = x(1 - x)$ und $y = -\frac{1}{2}x$

(a) als Flächenintegral.

(b) als Differenz zweier eindimensionaler Integrale.

(c) Berechnen Sie das Volumen zwischen der Fläche \mathcal{F} und der Funktion $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

Aufgabe 3: Kugelkoordinaten

Bestimmen Sie die Kugelkoordinaten der folgenden, in kartesischen Koordinaten angegebenen Punkte:

(a) $A = (5\sqrt{6}, 5\sqrt{2}, 1)$

(b) $B = (2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, -1)$

Aufgabe 4: Zylinderkoordinaten

- (a) Schreiben Sie das Volumenelement $dV = dx dy dz$ in Zylinderkoordinaten.
- (b) Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit Höhe h und Radius R in Zylinderkoordinaten.
- (c) Wie sähe das gleiche Integral in kartesischen Koordinaten aus? Welche Wahl der Koordinaten erscheint Ihnen geeigneter?

Aufgabe 5: Jacobi-Determinante

Bestimmen Sie die Jacobimatrix und -determinante für die folgenden Variablentransformationen:

(a) $x = 5u + 7v, \quad y = -3v$

(b) $x = u - v, \quad y = 2u - 3w, \quad z = u + 4v - 2vw$