 Übungsblatt 11 mit Lösungen

Aufgabe 1: Flächen- und Volumenintegrale

Bestimmen Sie die Fläche $\mathcal{F}$ zwischen den Kurven $y = x^4$ und $y = 2x^2 + 8$

(a) als Flächenintegral.

(b) als Differenz zweier eindimensionaler Integrale.

(c) Berechnen Sie das Volumen zwischen der Fläche $\mathcal{F}$ und der Funktion $f(x,y) = x + y$.

Lösung:

Die Schnittpunkte folgen aus dem Gleichsetzen der beiden Funktionen:

$$x^4 = 2x^2 + 8 \implies x^2 = 1 \pm \sqrt{1^2 + 8} = 1 \pm 3 \implies x^2 = \pm 2$$
$$\implies (x,y) = (-2,16) \lor (x,y) = (2,16).$$

(a) $$\mathcal{F} = \iint_{\mathcal{F}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\int_{x^4}^{2x^2+8} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\left(2x^2 + 8 - x^4\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\tfrac{2}{3}x^3 + 8x - \tfrac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2} = \tfrac{448}{15}.$$

(b) $$\mathcal{F} = \int_{-2}^{2}\left(2x^2 + 8\right)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} x^4\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2} - \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-2}^{2} = \tfrac{448}{15}.$$

(c) $$V = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{2x^2+8} (x + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\left[xy + \frac{y}{2}\right]_{-2}^{2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-2}^{2}\left(2x^3 + 8x - x^5 + 2x^4 + 32 + 8x^2 - \frac{x^8}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^4}{2} + 4x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} + 32x + \frac{8x^2}{3} - \frac{x^9}{18}\right]_{-2}^{2} = \tfrac{128}{5} + 128 - \tfrac{256}{9} = \tfrac{5632}{45}.$$

Aufgabe 2: Mehr Flächen- und Volumenintegrale

Bestimmen Sie die Fläche $\mathcal{F}$ zwischen den Kurven $y = x\,(1-x)$ und $y = -\frac{1}{2}x$

(a) als Flächenintegral.

(b) als Differenz zweier eindimensionaler Integrale.

(c) Berechnen Sie das Volumen zwischen der Fläche $\mathcal{F}$ und der Funktion $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$.

Lösung:

Die Schnittpunkte folgen aus dem Gleichsetzen der beiden Funktionen:

$$x\,(1-x) = -\tfrac{1}{2}x \implies x^2 = \tfrac{3}{2}x \implies x = 0 \vee x = \tfrac{3}{2} \implies (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = \left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{4}\right)$$

(a) $$\mathcal{F} = \int_0^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{1}{2}x}^{x(1-x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\tfrac{3}{2}x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}} = \tfrac{9}{16}.$$

(b) $$\mathcal{F} = \int_0^{\frac{3}{2}} x(1-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{3}{2}} \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\tfrac{1}{4}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}} = \tfrac{9}{8} - \tfrac{9}{8} + \tfrac{9}{16} = \tfrac{9}{16}.$$

(c) $$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{1}{2}x}^{x(1-x)} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2x}\left(x^2 + x^4 - 2x^3 - \tfrac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}} \left(x + x^3 - 2x^2 - \tfrac{1}{4}x\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{8}x^2\right]_0^{3/2}$$

$$= \tfrac{9}{16} + \tfrac{81}{128} - \tfrac{9}{8} - \tfrac{9}{64} = -\tfrac{9}{128}.$$

Aufgabe 3: Kugelkoordinaten

Bestimmen Sie die Kugelkoordinaten der folgenden, in kartesischen Koordinaten angegebenen Punkte:

(a) $A = \left(5\sqrt{6},\ 5\sqrt{2},\ 1\right)$

(b) $B = \left(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{2},\ -1\right)$

Lösung:

Die Kugelkoordinaten r, θ und ϕ sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arccos\tfrac{z}{r} \\ \phi &= \arctan\tfrac{y}{x} \end{aligned}$$

(a) $r = \sqrt{(5\sqrt{6})^2 + (5\sqrt{2})^2 + (1)^2} = \sqrt{150+50+1} = \sqrt{201} \simeq$ 14,177.

$\theta = \arccos\tfrac{z}{r} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{201}} \simeq$ 85,96°.

$\phi = \arctan\dfrac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \arctan\tfrac{1}{2} \simeq$ 26,57°.

(b) $r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{12+18+1} = \sqrt{31} \simeq$ 5,568.

$\theta = \arccos\tfrac{z}{r} = \arccos\dfrac{-1}{\sqrt{31}} \simeq$ 100,35°.

$\phi = \arctan\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \arctan\tfrac{1}{2} \simeq$ 50,77°.

Aufgabe 4: Zylinderkoordinaten

(a) Schreiben Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in Zylinderkoordinaten.

(b) Berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit Höhe h und Radius R in Zylinderkoordinaten.

(c) Wie sähe das gleiche Integral in kartesischen Koordinaten aus? Welche Wahl der Koordinaten erscheint Ihnen geeigneter?

Lösung:

Die Jacobimatrix ist $J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Das Volumenelement ist:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = |J|\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \left[1\left(r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)\right)\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z.$$

(b) $$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 2\pi h \int_0^R r\ \mathrm{d}r = \pi h R^2.$$

(c) $$V = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^h \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = h \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2h \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= 2h\left[\tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R} = \pi R^2 h$$

Das letzte Integral über x muss nachgeschlagen werden.

Aufgabe 5: Jacobi-Determinante

Bestimmen Sie die Jacobimatrix und -determinante für die folgenden Variablentransformationen:

(a) $x = 5u + 7v, \quad y = -3v$

(b) $x = u - v, \quad y = 2u - 3w, \quad z = u + 4v - 2vw$

Lösung:

(a) $J = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\det(J) = -15$

$\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -15\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

(b) $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4-2w & -2v \end{pmatrix}$

$\det(J) = 15 - 4v - 6w$

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (15 - 4v - 6w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$