Dr. Rainer Wanke **Übungsblatt 12 mit Lösungen** 07.04.2020

Aufgabe 1: Würfel

Wenn Sie einen Würfel werfen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie...

(a) ...eine Zahl kleiner als 3 würfeln?

(b) ...eine ungerade Zahl würfeln?

(c) ...eine ungerade Zahl oder eine Zahl kleiner als 3 würfeln?

Lösung:

(a) $p = \frac{1}{3}$ ($\{1,2\}$ aus $\{1,2,3,4,5,6\}$.)

(b) $p = \frac{1}{2}$ ($\{1,3,5\}$ aus $\{1,2,3,4,5,6\}$.)

(c) Die Lösung ist die Summe aus (a) und (b) unter Berücksichtigung, dass der gemeinsame Fall ("1") abgezogen werden muss, um nicht doppelt gezählt zu werden:
$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ($\{1,2,3,5\}$ aus $\{1,2,3,4,5,6\}$.)

Aufgabe 2: Spielkarten

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus einem Satz von 52 Spielkarten (für alle 4 Farben 2 bis 10 und Bube, Dame, König, Ass)...

(a) ...ein Karo ziehen?

(b) ...eine ungerade Zahl ziehen?

(c) ...keine Zahl ziehen?

Lösung:

(a) $p = \frac{1}{4}$. (Es gibt vier Farben.)

(b) $p = 4 \cdot \frac{4}{52} = \frac{4}{13}$. (4-mal $\{3,5,7,9\}$ aus 52 Karten.)

(c) $p = 4 \cdot \frac{4}{52} = \frac{4}{13}$. (4-mal {Bube, Dame, König, Ass} aus 52 Karten.)

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeiten

Welche dieser Zahlen können keine Wahrscheinlichkeiten angeben?

– 0,00001; 0,5; 1,001; 0; 1; 20 %.

Lösung:

Für Wahrscheinlichkeiten p gilt immer $0 \leq p \leq 1$, d.h. – 0,00001 und 1,001 können keine Wahrscheinlichkeiten angeben.

Aufgabe 4: Mississippi

(a) Wieviele verschieden Buchstabenanordnungen können Sie aus den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden?

(b) Wieviele davon fangen mit M an und hören mit S auf?

Lösung:

(a) Wir benutzen die "MISSISIPPI"-Formel aus der Vorlesung mit $n = 11$ Buchstaben, von denen zwei (I und S) $k_1 = k_2 = 4$-mal und einer (P) $k_3 = 2$-mal vorkommen:

$$P_{11}^{4,4,2} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34\,650.$$

(b) Es gibt zwei Lösungsmöglichkeiten:

- Wir benutzen die gleiche Formel wie in (a), allerdings mit $n = 9$ Buchstaben, da ja das M vorne und ein S hinten gesetzt sind. Damit sind $k_1 = 4$ (I), $k_2 = 3$ (S) und $k_3 = 2$ (P):

$$P_{9}^{3,4,2} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1\,260.$$

- Wir benutzen die Zahl der Anordnungen $P_{11}^{4,4,2} = 34650$ aus (a). Die Wahrscheinlichkeit, dass das M an erster Stelle steht, ist $p_1 = \frac{1}{11}$ und die Wahrscheinlichkeit, dass eins der vier S an der letzten Stelle der verbleibenden 10 Buchstaben steht, ist $p_2 = \frac{4}{10}$. Damit ist:

$$P = P_{11}^{4,4,2} \cdot p_1 \cdot p_2 = \frac{11!}{4!\,4!\,2!} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1\,260.$$

Aufgabe 5: Tennisturnier

Zehn Tennisspieler wollen ein Turnier im Doppel (zwei Spieler pro Team) austragen:

(a) Wie viele verschiedene Teams können sie bilden?

(b) Wenn Sie sich über die Teams geeinigt haben, wieviele Spiele tragen sie aus, wenn jedes Team einmal gegen jedes andere Team spielt?

Lösung:

(a) Die Aufgabe ist nicht völlig klar gestellt. Wenn gemeint ist, wieviel verschiedene Zweierkombinationen es gibt, ist die Antwort “ziehe 2 aus 10”, d.h.:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \text{ Zweierkombinationen.}$$

Falls gemeint ist, wieviel Möglichkeiten es gibt, die 10 Spieler in 5 Teams aufzuteilen, erhält man die Antwort so: Der erste Spieler kann mit 9 anderen ein Team bilden, der erste von den verbleibenden 8 Spielern kann mit 7 anderen ein Team bilden, usw. Insgesamt gibt es also:

$$9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945 \text{ Möglichkeiten.}$$

(b) Das erste Team trägt 4 Spiele gegen die anderen 4 Teams aus, das zweite Team zusätzlich 3 Spiele gegen die anderen Teams außer dem ersten, usw. Die Zahl der Spiele ist also $4! = 24$.

Aufgabe 6: Mehr Spielkarten

Sie haben wieder die obigen 52 Spielkarten. Wieviel Möglichkeiten für verschiedene Kartensätze gibt es für. . .

(a) fünf Karten?

(b) fünf Karten, von denen vier Asse sind?

(c) fünf Karten, von denen vier den gleichen Wert haben?

(d) fünf Karten, von denen genau zwei Asse sind?

(e) fünf Karten, von denen mindestens zwei Asse sind?

(f) einem Full House (fünf Karten, von denen sowohl drei einen gleichen Wert als auch die anderen zwei einen gleichen Wert haben)?

Lösung:

(a) $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ Möglichkeiten.

(b) Es gibt $52 - 4 = 48$ Möglichkeiten eine Karte zu wählen, wenn die vier Asse bereits gezogen sind.

(c) Es gibt $\frac{52}{4} = 13$ Möglichkeiten, vier Karten mit dem gleichen Wert zu haben und jeweils $52 - 4 = 48$ weitere Karten, also insgesamt $13 \cdot 48 = 624$ verschiedene Möglichkeiten.

(d) Es gibt $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, um zwei aus vier Assen auszuwählen, und $\binom{48}{3}$ Möglichkeiten, um drei Karten aus den restlichen 48 Karten auszuwählen.

$$\Longrightarrow \quad \binom{4}{2} \cdot \binom{48}{3} = 12 \cdot 17\,296 = 207\,552.$$

(e) Es gibt $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ Möglichkeiten, um zwei, drei oder vier aus vier Assen auszuwählen, und wieder $\binom{48}{3}$ Möglichkeiten für die restlichen drei Karten.

$$\Longrightarrow \quad \left[\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] \cdot \binom{48}{3} = (12 + 4 + 1) \cdot 17\,296 = 294\,032.$$

(f) $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = (13 \cdot 4) \cdot (12 \cdot 12) = 196.$