Dr. Rainer Wanke **Übungsblatt 13 mit Lösungen** 08.04.2020

Aufgabe 1: Fuhrpark

Eine Firma hat einen Fuhrpark mit 300 Fahrzeugen. Von diesen Fahrzeugen sind 15 weniger als ein Jahr alt, 36 zwischen ein und zwei, 79 zwischen zwei und vier, 71 zwischen vier und sechs und 99 zwischen sechs und zehn Jahren alt.

Da nichts weiter bekannt ist, nehme man an, dass die Fahrzeuge jeweils ein Alter haben, das in der Mitte des angegebenen Intervalls liegt.

(a) Wie alt sind die Fahrzeuge im Mittel?

(b) Wie groß sind die Standardabweichung der Altersverteilung und der Fehler auf den Mittelwert?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Wahl ein Fahrzeug zu erhalten, das jünger als vier Jahre ist?

Lösung:

(a) Der Mittelwert ist:

$$\mu = \frac{1}{300} \cdot (15 \cdot 0.5 + 36 \cdot 1.5 + 79 \cdot 3 + 71 \cdot 5 + 99 \cdot 8) = 4.8.$$

(b) Da der Mittelwert nicht bekannt ist (sondern nur gemessen), ist die Varianz:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{300-1}\left[15\,(0.5-\mu)^2 + 36\,(1.5-\mu)^2 + 79\,(3-\mu)^2 + 7\,(5-\mu)^2 + 99\,(8-\mu)^2\right] \\ &= \frac{1}{299}\left[15 \cdot 4{,}3^2 + 36 \cdot 3{,}3^2 + 79 \cdot 1{,}8^2 + 7 \cdot 0{,}2^2 + 99 \cdot 3{,}2^2\right] \\ &\simeq 6{,}49. \end{aligned}$$

Damit ist die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{6{,}49} \simeq 2{,}55$$

und der Fehler auf den Mittelwert

$$\sigma_\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{300}} \simeq 0{,}147$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit ist $p = \frac{130}{300} = 0{,}43.$

Aufgabe 2: Mittelwert

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (Gaußverteilung) den Mittelwert μ hat.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x + \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\left[-\sigma^2\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \mu\, \sigma\sqrt{2\pi} \right) \\
&= \mu .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: Drahtdurchmesser

Zur Bestimmung des Durchmessers eines Kupferdrahtes misst man seine Dichte zu $\rho = (8{,}80 \pm 0{,}05)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, seine Masse zu $m = (0{,}0236 \pm 0{,}0001)\,\mathrm{g}$ und seine Länge zu $l = (96{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$.

(a) Wie groß ist der Mittelwert des Drahtdurchmessers?

(b) Wie groß ist die Messunsicherheit des Mittelwerts des Drahtdurchmessers? Welche Unsicherheit gibt den größten Beitrag?

(c) Wie lautet die korrekte Angabe der Messung des Drahtdurchmessers?

Lösung:

(a) $$d = \sqrt{\frac{4\,m}{\pi\,\rho\,l}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}0236\,\mathrm{g}}{\pi \cdot 8{,}80\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 96{,}0\,\mathrm{cm}}} = 59{,}64\,\mu\mathrm{m}$$

(b) $$\begin{aligned}
\sigma_d &= \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial \rho}\right)^2 \sigma_\rho^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2\,d}\,\frac{4}{\pi\,\rho\,l}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{1}{2\,d}\,\frac{4\,m}{\pi\,\rho\,l^2}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(\frac{1}{2\,d}\,\frac{4\,m}{\pi\,\rho^2\,l}\right)^2 \sigma_\rho^2} \\
&= \frac{2\,m}{d\,\pi\,\rho\,l}\sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2} \\
&= \frac{2 \cdot 0{,}0236\,\mathrm{g}}{59{,}64\,\mu\mathrm{m} \cdot \pi \cdot 8{,}80\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 96{,}0\,\mathrm{cm}} \sqrt{\left(\frac{0{,}0001\,\mathrm{g}}{0{,}0236\,\mathrm{g}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2\,\mathrm{cm}}{96{,}0\,\mathrm{cm}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}{8{,}80\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}\right)^2} \\
&= 29{,}8\,\mu\mathrm{m} \cdot \sqrt{(0{,}42\,\%)^2 + (0{,}21\,\%)^2 + (0{,}57\,\%)^2} \\
&= 0{,}22\,\mu\mathrm{m}.
\end{aligned}$$

ρ gibt den größten Beitrag, da der relative Fehler am größten ist.

(c) $d = (59{,}64 \pm 0{,}22)\,\mu\mathrm{m}$.