Große Wiederholung des Vorkurses

Aufgabe 1: Vektoren

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Länge von $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

(b) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht.

Lösung:

(a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{c}| = \sqrt{29}$.

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 + 1 + 2 = 6$.

(c) Ein Beispiel wäre $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und allgemein alle Vielfachen davon.

Aufgabe 2: Grenzwerte

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 1}$

Lösung:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \dfrac{0}{0}$. Mit de l'Hôpital $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$.

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Mit zweimal de l'Hôpital $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Bestimme die Null- und Extremstellen der Funktion $f(x) = 2x^2 - x^4$ und skizziere sie.

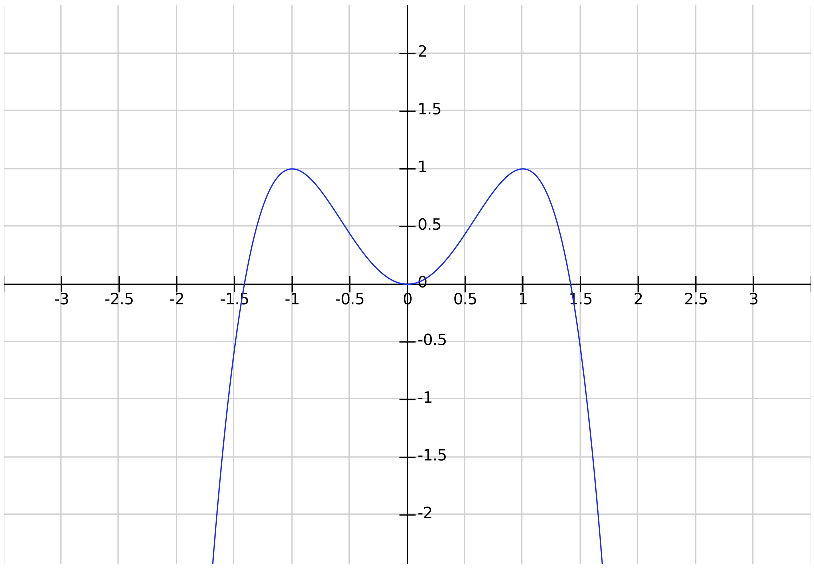
Lösung:

Nullstellen: $f(x) = 0 \implies x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}.$

Extremstellen: $f'(x) = 4x - 4x^3 = 0 \implies x = 0, x = \pm 1.$

$f''(x) = 4 - 12x \implies f''(0) = 4 \implies$ Minimum bei $x = 0.$

$f''(\pm 1) = -8 \implies$ Maxima bei $x = \pm 1.$



Aufgabe 4: Taylor-Entwicklung

Wie lautet die Taylor-Entwicklung der Funktion $f(x) = e^x$?

Lösung:

$f(0) = 1$ und $f^{(n)}(x) = e^x$ mit $f^{(n)}(0) = 1.$

Taylor-Entwicklung: $f(x) \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$

Aufgabe 5: Integrale

Bestimmen Sie eine Stammfunktion bezüglich x für die folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = a\,x^n$ mit $a, n \in \mathbb{R}$ und $n \neq -1$

(b) $f(x) = x^2 \ln x$

(c) $f(x) = x \cos x$

Lösung:

(a) $\int ax^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{a}{n+1}\, x^{n+1}.$

(b) $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} \ln x - \int \dfrac{x^3}{3x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{9} x^3 \, (3 \ln x - 1).$ (Produktregel)

(c) $\int x \cos x \, \mathrm{d}x = x \sin x - \int \cos x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x.$ (Produktregel)

Aufgabe 6: Komplexe Zahlen

Schreiben Sie in der Form $x + \mathrm{i}\,y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i}^2 := -1$).

(a) $\dfrac{1}{1 - 2\,\mathrm{i}}$

(b) $e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}$

Lösung:

(a) $\dfrac{1}{1-2\,\mathrm{i}} \cdot \dfrac{1+2\,\mathrm{i}}{1+2\,\mathrm{i}} = \frac{1}{5} + \mathrm{i}\,\frac{2}{5}$

(b) $e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i} \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 7: Eulersche Formel

Leiten Sie aus der eulerschen Formel für $e^{\mathrm{i}\,(x+y)}$ die Additionstheoreme für $\cos(x+y)$ und $\sin(x+y)$ her.

Lösung:

Einerseits ist

$$e^{\mathrm{i}\,(x+y)} = \cos(x+y) + \mathrm{i}\sin(x+y)$$

und anderseits

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\,(x+y)} &= e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}y} = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + \mathrm{i}\,(\sin x\cos y + \cos x\sin y). \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Matrizen

Gegeben seien die zwei Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie Summe und Produkt von A und B.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A und ihr Inverses A^{-1}, falls dieses existiert.

Lösung:

(a) $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) det(A) $= 3$ und $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.