# 5. Differentialrechnung: Inhalt

# Ableitung

## Definition

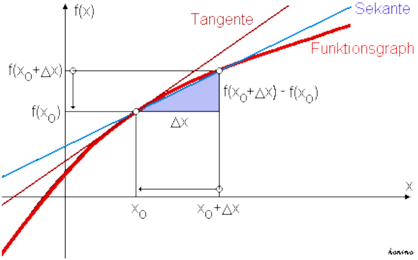
Die Funktion $f(x)$ heißt **differenzierbar** in $x_0$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (73)$$

existiert.

Der Grenzwert heißt **Ableitung** von $f$ in $x_0$ und wird mit $\boldsymbol{f'(x_0)}$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an $f(x)$ an der Stelle $x_0$.



# Ableitung

**Differenzierbarkeit ist stärkere Eigenschaft als Stetigkeit:**

Annahme: $f(x)$ sei in $x_0$ differenzierbar. Daraus folgt mit $\Delta x = x - x_0$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x \\ &= f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0), \text{ d.h. } f(x) \text{ ist stetig im Punkt } x_0.$$

**Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $a \leq x \leq b$ und für $a < x < b$ differenzierbar, so gibt es mindestens einen Punkt $c$ mit $a < c < b$, so dass

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{74}$$

# Beispiele für Ableitungen

## Beispiel: Ableitung von $f(x) = x^2$

$$(x_0^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0\,\Delta x + \Delta x) = \mathbf{2\,x_0}$$

## Beispiel: Ableitung von $f(x) = e^x$

$$(e^{x_0})' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x)^3\right) - 1}{\Delta x}$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{2!} + \mathcal{O}(\Delta x)^2\right) = \boldsymbol{e^{x_0}} \quad \left(\text{mit } e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\right)$$

# Ableitungen elementarer Funktionen

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^a$ | $a\,x^{a-1}$ |
| $\frac{1}{x^a}$ | $-\frac{a}{x^{a+1}}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\text{arccot}\ x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\ln \lvert x \rvert$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\tanh x$ | $\frac{1}{\cosh^2 x}$ |
| $\coth x$ | $-\frac{1}{\sinh^2 x}$ |
| $\text{arsinh}\ x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\text{arcosh}\ x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\text{artanh}\ x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| $\text{arcoth}\ x$ | $-\frac{1}{x^2-1}$ |

# Differentiationsregeln

**Konstantenregel**

$$c' = 0 \quad (\text{mit} \;\; c \in \mathbb{R}) \tag{75}$$

**Faktorregel**

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \quad (\text{mit} \;\; c \in \mathbb{R}) \tag{76}$$

**Summenregel**

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \tag{77}$$

**Produktregel**

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{78}$$

**Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \tag{79}$$

**Kettenregel**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{80}$$

# Differentiationsregeln

## Beispiel Produktregel: $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$$\begin{aligned}(\sin x \cdot \cos x)' &= (\sin x)' \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) \\ &= \boldsymbol{\cos^2 x - \sin^2 x}\end{aligned}$$

## Beispiel Quotientenregel: $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}} = \boldsymbol{1 + \tan^2 x}\end{aligned}$$

## Beispiel Kettenregel: $f(x) = (1 + x)^2$

Setze als innere Funktion $g(x) := 1 + x$.

$$\Longrightarrow \; \big(f(g(x))\big)' = f'(g) \cdot g'(x) = \left(g^2\right)' \cdot (1 + x)' = 2\,g \cdot 1 = \boldsymbol{2\,(1 + x)}$$

# Das Differential

## Differentialquotient

Man nennt den Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{81}$$

Differenzenquotient. Der Grenzwert für $\Delta x \to 0$ ist die erste Ableitung oder Differentialquotient von $y = f(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{82}$$

## Differential

$\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ sind die Differentiale von $x$ und $y = f(x)$.

Es gilt $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

# Höhere Ableitungen

Da $f'(x)$ auch eine Funktion ist, kann man ebenfalls deren Ableitung definieren:

## Zweite Ableitung

Die 2. Ableitung von $y = f(x)$ nach $x$ ist definiert als der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x) \tag{83}$$

Weitere Schreibweisen:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x)$$

Allgemein schreibt man die n-te Ableitung von $y = f(x)$ nach $x$ als

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = f^{(n)}(x).$$

# Extremwerte

**Lokales Minimum:**
Stelle, in deren Umgebung die Funktion keinen kleineren Wert hat.

**Lokales Maximum:**
Stelle, in deren Umgebung die Funktion keinen größeren Wert hat.

Notwendige bzw. hinreichende Kriterien:

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0 \implies$ lokales Maximum.

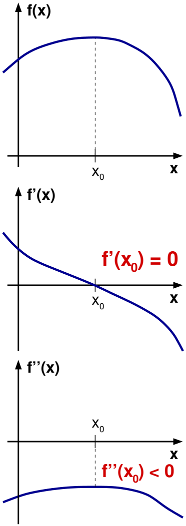
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0 \implies$ lokales Minimum.

$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0 \implies$ im Allgemeinen kein Extremwert.

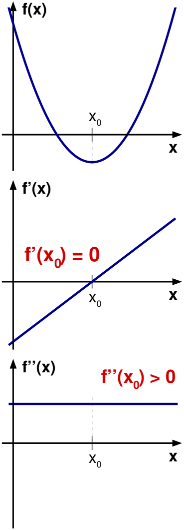
- Wenn ein lokales Minimum der niedrigste Wert im Wertebereich ist, spricht man vom absoluten Minimum.
- Analog gilt dies für absolute Maxima.

# Extremwerte

## Maximum:




## Minimum:



# Wendepunkte

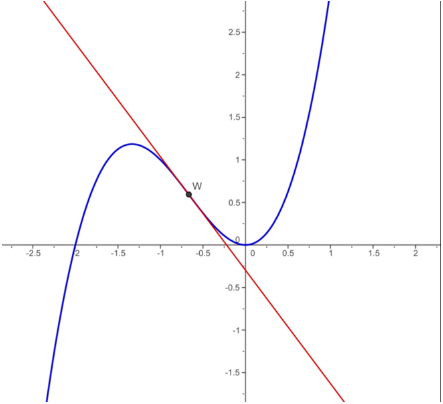
**Wendepunkt:**

Stelle, an der die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert.

Kriterium:

$$f''(x_0) = 0 \ \wedge \ f'''(x_0) \neq 0$$

- Ein Wendepunkt mit $f'(x_0) = 0$ heißt Sattelpunkt.



# Regel von de l'Hôpital

Gesucht ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}$ mit entweder

$$\lim_{x \to a} \phi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to a} \phi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = \infty .$$

Wenn die Funktionen in $a$ differenzierbar sind, dann gilt:

## Regel von de l'Hôpital

$$\lim_{x \to a} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)} \tag{84}$$

Das Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden.