9. Flächen- und Volumenintegrale: Inhalt

Flächenintegrale

Definition

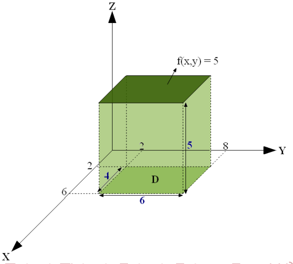
Ein **Flächenintegral** ist das Integral einer 2-dimensionalen Funktion $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über einen Bereich $\mathcal{F}$ der (x, y)-Ebene.

$$I = \iint_{\mathcal{F}} f(x, y)\, dx\, dy \tag{144}$$

$dx\, dy$ ist das infinitesimale Flächenelement.

Das Flächenintegral stellt das Volumen unter der Funktion $f(x, y)$ über dem Bereich $\mathcal{F}$ dar.

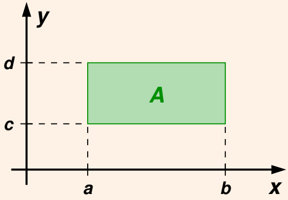
Mit $f(x, y) = 1$ erhält man den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$.



Berechnung von Flächenintegralen

Beispiel: Fläche eines Rechtecks

Rechteck begrenzt durch a und b in x-Richtung und c und d in y-Richtung. Zur Flächenberechnung setzen wir $f(x, y) = 1$.



$$\Longrightarrow \quad A = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \int_c^d dy\, dx = \int_a^b [y]_c^d\, dx = \int_a^b (d - c)\, dx$$

$$= (d - c)\, [x]_a^b = (b - a)\,(d - c)$$

in Übereinstimmung mit der üblichen geometrischen Berechnung.

Berechnung von Flächenintegralen

Sei der Bereich $\mathcal{F}$ durch Randkurven begrenzt:

$$\mathcal{F} = \{(x,y)\,|\,x_1 \le x \le x_2,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\} \tag{145}$$

Dann kann man das Integral iterativ berechnen:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathcal{F}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x))]\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{146}$$

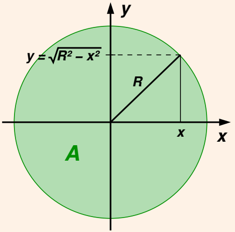
mit $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = f(x,y)$

($\frac{\partial}{\partial y}$ ist die partielle Ableitung nach y, siehe Seite 154 weiter unten.)

Berechnung von Flächenintegralen

Beispiel: Fläche eines Kreises

Ein Kreis habe den Radius R. Wir setzen wieder $f(x,y) = 1$ und verwenden, dass für einen gegebenen x-Wert die Kreisfläche A durch $\pm y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ begrenzt ist.



$$A = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \left[\,y\,\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{Tabelle}}{=} 2\left[\,\tfrac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}R^2 \arcsin\tfrac{x}{R}\,\right]_{-R}^{R}$$

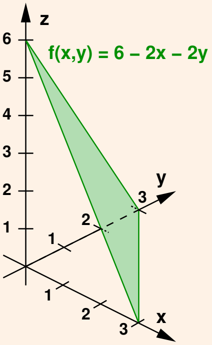
$$= R\sqrt{R^2 - R^2} + R^2 \arcsin\tfrac{R}{R} - (-R)\sqrt{R^2 - (-R)^2} - R^2 \arcsin\tfrac{-R}{R}$$

$$= R^2\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) = R^2\left(\tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2})\right) = \pi R^2.$$

Berechnung von Flächenintegralen

Beispiel: Volumenberechnung mit Hilfe eines Flächenintegrals

Berechne das Volumen V unter der Funktion
$f(x,y) = 6 - 2x - 2y$ für $x, y, z > 0$.



$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_0^{3-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} (6 - 2x - 2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left[\,6y - 2xy - y^2\,\right]_{y=0}^{y=3-x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \left(\,6\,(3-x) - 2x\,(3-x) - (3-x)^2\,\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\,\tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\,\right]_{x=0}^{x=3} \\
&= \tfrac{1}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 + 9\cdot 3 \;=\; 9.
\end{aligned}
$$

Volumenintegrale

Definition

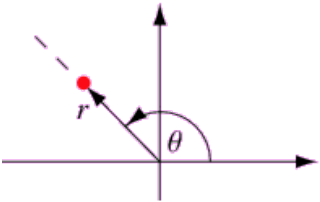
Ein Volumenintegral ist das Integral eines skalaren Funktion $f(x,y,z) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ über einen Bereich $\mathcal{V}$ des Raums.

$$I = \iiint_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{147}$$

$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ist das infinitesimale Volumenelement.

- Mit $f(x,y,z) = 1$ erhält man das Volumen von $\mathcal{V}$.
- Die Berechnung von Volumenintegralen erfolgt analog zur Berechnung von Flächenintegralen.
- Volumenintegrale werden u.a. verwendet, um den Mittelwert eines Skalarfeldes über ein Volumen zu bestimmen.

Ebene Polarkoordinaten



$(x, y) \to (r, \phi)$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{148}$$

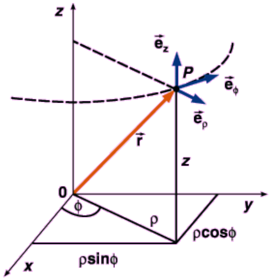
$$\Longrightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \tag{149}$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} \tag{150}$$

Die Basisvektoren sind lokal definiert, d.h. sie sind positionsabhängig.

Zylinderkoordinaten



$(x, y, z) \rightarrow (r, \phi, z)$

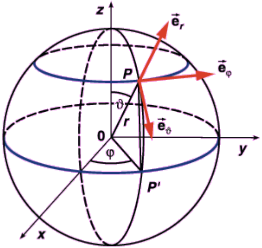
$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{151}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \tag{152}$$

Basisvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{153}$$

Kugelkoordinaten



$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\phi \\
y &= r \sin\theta \sin\phi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned} \qquad (154)
$$

$$
\Longrightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (155)
$$

Basisvektoren

$$
\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (156)
$$

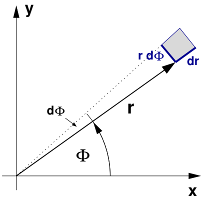
Variablenwechsel bei Flächenintegralen

Bei einem Variablenwechsel $(x, y) \to (u, v)$ muss mit dem Flächeninhalt des neuen Flächenelements multipliziert werden.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

Das infinitesimale Flächenelement beim Übergang $(x, y) \to (r, \phi)$ ist:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\phi \cdot \mathrm{d}r = r \cdot \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \qquad (157)$$



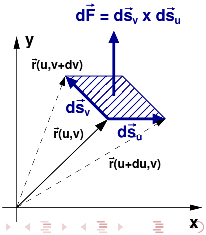
Allgemein ist das Flächenelement:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}\vec{s}_u \times \mathrm{d}\vec{s}_v \qquad (158)$$

mit

$$\mathrm{d}\vec{s}_u = \vec{r}(u, v) - \vec{r}(u + \mathrm{d}u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u \qquad (159)$$

$$\mathrm{d}\vec{s}_v = \vec{r}(u, v) - \vec{r}(u, v + \mathrm{d}v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v \qquad (160)$$



Einschub: Partielle Ableitung

Wenn eine Funktion von mehreren Variablen abhängt, kann man die Funktion nur bezüglich einer Variable differenzieren, in dem man die anderen Variablen als Konstanten betrachtet. Diese Ableitung nennt man **partielle Ableitung**.

Definition

Sei $f = f(x, y, z)$ eine skalare Funktion.

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \tag{161}$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Kürzere Notationen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x \tag{162}$$

Jacobi-Determinante

Bei einem Variablenwechsel $(x, y) \to (u, v)$ in einem Flächenintegral erhält man nach Glg. (159):

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \qquad (163)$$

Analog gilt für Volumenintegrale und $(x, y, z) \to (u, v, w)$:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \qquad (164)$$

$\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|$ und $\left|\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial w}\right|$ können als Determinanten einer (2×2)- bzw. (3×3)-Matrix dargestellt werden:

Jacobi-Matrix

$$J = \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_i}\right) \qquad (165)$$

Transformationen in Polar- und Kugelkoordinaten

- Polar- und Zylinderkoordinaten:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r \qquad (166)$$

$$\Longrightarrow \quad dx\,dy = r \cdot dr\,d\phi \quad \text{bzw.} \quad dx\,dy\,dz = r \cdot dr\,d\phi\,dz. \qquad (167)$$

- Kugelkoordinaten:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta \qquad (168)$$

$$\Longrightarrow \quad dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta \cdot dr\,d\theta\,d\phi. \qquad (169)$$

Kugelkoordinaten

Herleitung: Jacobi-Determinate für Kugelkoordinaten

Es gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad |J| = \; & \cos\theta\big(r^2\cos\theta\cos\phi\cdot\sin\theta\cos\phi + r^2\sin\theta\sin\phi\cdot\cos\theta\sin\phi\big) \\ & + r\sin\theta\big(r\sin\theta\cos\phi\cdot\sin\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi\cdot\sin\theta\sin\phi\big) + 0 \\ = \; & r^2\left(\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + \sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + \sin^3\theta\cos^2\phi + \sin^3\theta\sin^2\phi\right) \\ = \; & r^2\sin\theta\left[\cos^2\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \sin^2\theta\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\right] \\ = \; & r^2\sin\theta\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right] \; = \; r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{dx\,dy\,dz} \; = \; |\boldsymbol{J}|\,\mathbf{dr\,d\theta\,d\phi} \; = \; \boldsymbol{r^2}\,\mathbf{\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi}.$$

Kugelkoordinaten

Beispiel: Volumen einer Kugel mit Radius R

Wir setzen wieder $f(x, y, z) = 1$.

Dann ist:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Kugel}} &= \iiint\limits_{\text{Kugel}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{3}\,r^3\right]_0^R \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \tfrac{1}{3}\,R^3 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \tfrac{2}{3}\,R^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \boldsymbol{\tfrac{4}{3}\,\pi\,R^3}.
\end{aligned}
$$