4. Funktionen: Inhalt

4 Funktionen

Definition, Stetigkeit

Definition

Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y aus einer Menge W zuordnet:

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{oder} \quad y = f(x) \tag{50}$$

Man nennt die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ Definitionsbereich
und die Menge $W \subseteq \mathbb{R}$ Wertebereich.

Eine Funktion ist stetig, wenn sie keinen Sprung macht.

Stetigkeit

Eine reelle Funktion ist genau dann stetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ erfüllt ist.

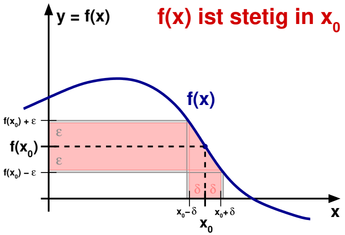
Stetigkeit und Unstetigkeit

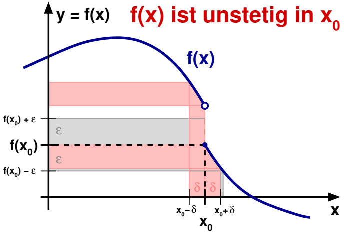
Veranschaulichung der Stetigkeit

1. Wähle ein $x_0 \in D$.
2. Wähle ein beliebig kleines $\epsilon > 0$.
3. Bilde Bereich $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ auf der y-Achse (grau in den Abbildungen).
4. Gibt es ein $\delta > 0$, so dass das Intervall $|x - x_0| < \delta$ (rosa) vollständig in $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ abgebildet wird?

   Ja $\Longrightarrow$ f ist stetig in x_0.

   Nein $\Longrightarrow$ f ist unstetig in x_0.





Eigenschaften von stetigen Funktionen

Zwischenwertsatz

Ist $f(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $a \leq x \leq b$ und y eine beliebige Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, dann gibt es mindestens eine Zahl x in $a < x < b$ mit $f(x) = y$.

Im speziellen Fall $y = 0$ kann man aus dem Zwischenwertsatz folgern, dass die Funktion mindestens eine Nullstelle haben muss, wenn es mindestens einen Funktionswert > 0 und einen < 0 gibt.

Summe, Differenz und Produkt zweier stetigen Funktionen sind auch stetige Funktionen im Durchschnitt der Definitionsbereiche.

Für $\frac{f(x)}{g(x)}$ muss man zusätzlich die Punkte mit $g(x) = 0$ aus dem Definitionsbereich herausnehmen.

Grenzwerte

Häufungspunkt

Eine Zahl x_0 heißt **Häufungspunkt** einer Teilmenge D der reellen Zahlen, wenn in jeder ϵ-Umgebung von x_0 unendlich viele Zahlen aus D liegen. x_0 selbst muss kein Element von D sein.

Grenzwert

x_0 sei Häufungspunkt des Definitionsbereichs D einer Funktion $f(x)$.
Die Funktion $f(x)$ hat für x_0 den **Grenzwert** c, wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - c| < \epsilon$ erfüllt ist.

Die Kurzform dafür ist: $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$

Singularitäten und Asymptoten

Konvergenz

$f(x)$ konvergiert gegen den Grenzwert c, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$$

Die Funktion kann stetig fortgesetzt werden mit der zusätzlichen Definition $f(x_0) = c$.

Singularität

Ein Punkt x_0 mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Asymptote

Näherungsgerade der Funktion für $x \to \pm\infty$.

Polynome

Definition

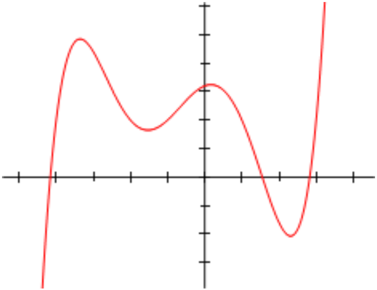
Ein **Polynom** ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j . \qquad (51)$$

Die höchste vorkommende Potenz n heißt Grad des Polynoms.

Eigenschaften:

- Polynome sind stetig.
- Ein Polynom hat höchstens so viele Nullstellen wie sein Grad.



Rationale Funktionen

Definition

Eine **rationale Funktion** lässt sich als Quotient zweier Polynome darstellen:

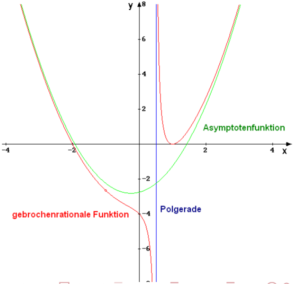
$$f(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{m} b_k x^k} \tag{52}$$

Sie ist für die Werte definiert, für die der Nenner nicht null ist.

Polstelle:
x-Wert, für den die Funktion gegen ∞ geht.

Asymptote:
Gerade, der sich die Kurve für große $|x|$-Werte beliebig nahe annähert.

Eine rationale Funktion kann Polstellen und Asymptoten haben, muss aber nicht.



Exponentialfunktion

Definition

Die **Exponentialfunktion** ist definiert durch

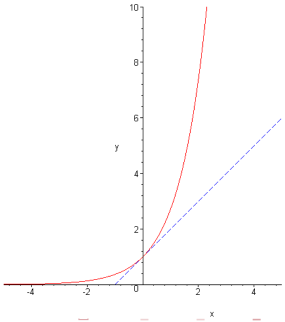
$$f(x) = e^x. \tag{53}$$

Die Basis ist die eulersche Zahl e oder jede andere positive reelle Zahl.

Es gilt das Additionstheorem

$$e^{x+y} = e^x e^y \tag{54}$$

Die Exponentialfunktion ist stetig, überall positiv, monoton wachsend und geht für große x-Werte schneller gegen Unendlich als jedes Polynom.



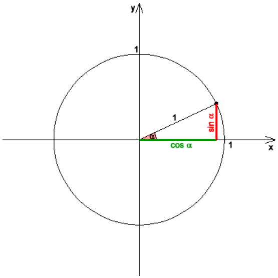
Trigonometrische Funktionen

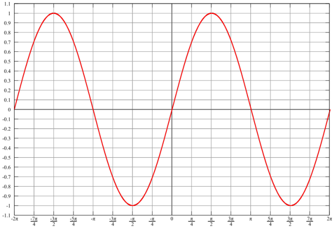
Definition

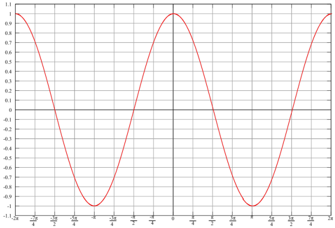
Bezüglich der Abbildung rechts sind die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens wie folgt definiert:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \tag{55}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{56}$$







Sinus und Kosinus

Nach Definition gilt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \tag{57}$$

$$\sin(\alpha + n\cdot 2\pi) = \sin\alpha \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{58}$$

$$\cos(\alpha + n\cdot 2\pi) = \cos\alpha \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{59}$$

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{60}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{61}$$

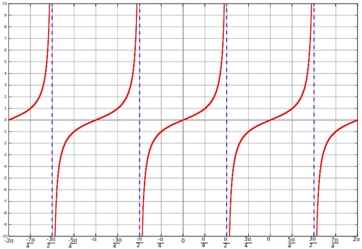
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2} \tag{62}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{63}$$

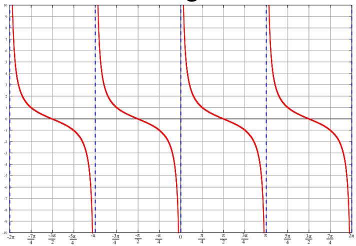
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{64}$$

Tangens und Kotangens

Tangens



Kotangens



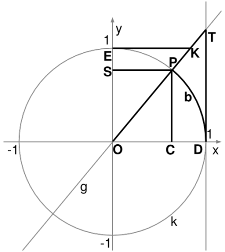
Periodische Funktionen mit Periode π.

Polstellen bei $\pi/2 + n\pi$ bzw. $n\pi$.

Additionstheoreme:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta} \quad (65)$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \quad (66)$$



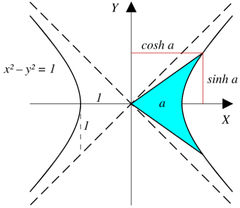
Hyperbolische Funktionen

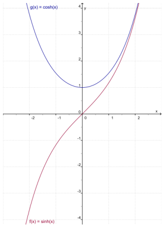
Definition

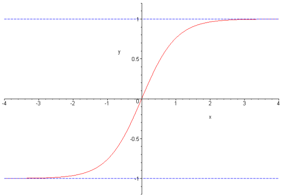
Hyperbolischer Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens sind Kombinationen der Exponentialfunktionen:

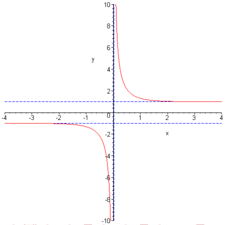
$$\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \qquad \cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \tag{67}$$

$$\tanh a = \frac{\sinh a}{\cosh a} \qquad \coth a = \frac{\cosh a}{\sinh a} \tag{68}$$









Umkehrfunktion

Definition

Die **Umkehrfunktion** einer Funktion f ist eine Funktion g mit

$$g(f(x)) = x. \tag{69}$$

Man bezeichnet sie auch mit f^{-1}.

Verfahren

Die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ von $y = f(x)$ erhält man durch:

- Vertauschung von x und y.
- Auflösen nach y.

Geometrisch:
Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.
(Eventuell Wertebereich einschränken, um eine eindeutige Umkehrfunktion zu erhalten.)

Logarithmus

Definition

Der **Logarithmus** einer Zahl c zur Basis a ist die Potenz, mit der man a potenzieren muss, um c zu erhalten:

$$a^{\log_a c} = c \tag{70}$$

Logarithmen zur Basis e heißen natürliche Logarithmen.

Der Logarithmus ist eine stetige und monotone Funktion, die für $x > 0$ definiert ist.

Rechenregeln:

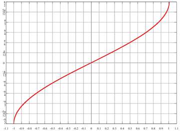
$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \tag{71}$$

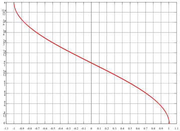
$$\ln x^y = y \cdot \ln x \qquad \ln \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y} \cdot \ln x \tag{72}$$

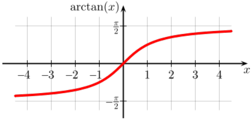
Arcusfunktionen

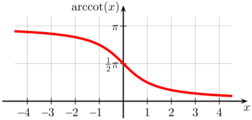
Die Arcusfunktionen Arcussinus, Arcuskosinus, Arcustangens und Arcuskotangens sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen und geben die Bogenlänge im Einheitskreis an.

Funktion	D	W	Arcusfunktion	D	W
$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	$y = \arcsin x$	$[-1;1]$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$	$y = \arccos x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$
$y = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}$	$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$
$y = \cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{n\pi\}$	$\mathbb{R}$	$y = \operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$	$]0;\pi[$









Areafunktionen

Die Areafunktionen Areasinus, Areakosinus, Areatangens und Areakotangens sind die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen.

Funktion	D	W	Areafunktion	D	W
$y = \sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$y = \operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \cosh x$	$\mathbb{R}$	$y \geq 1$	$y = \operatorname{arcosh} x$	$x \geq 1$	$y \geq 0$
$y = \tanh x$	$\mathbb{R}$	$]-1;1[$	$y = \operatorname{artanh} x$	$]-1;1[$	$\mathbb{R}$
$y = \coth x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus [-1;1]$	$y = \operatorname{arcoth} x$	$\mathbb{R} \setminus [-1;1]$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$