1. Grundlagen: Inhalt

1 Grundlagen

- Physikalische Messungen
- Aussagenlogik
- Beweismethoden
- Mengen
- Gruppen

Experiment

Definition

Ein **Experiment** (lat.: *experimentum* „Versuch, Beweis, Prüfung“) im Sinne der Wissenschaft ist eine methodisch angelegte Untersuchungsanordnung.

Man beobachtet Vorgänge in der Natur und wiederholt sie im Labor unter wohl definierten Bedingungen, meistens mit der Möglichkeit Variablen zu verändern.

Die **Messung**, die daraus erfolgt, ist die quantitative Bestimmung einer physikalischen Größe durch Vergleich mit der Größeneinheit.

Bestandteile eines Messergebnisses

Beispiel von einem Messergebnis

$$J = (1{,}74 \pm 0{,}23) \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

1. **Name (J)**: das Symbol, mit dem die gemessene Größe in den verwendeten Formeln angegeben wurde.
2. **Messwert ($\bar{J}$)**: eine Zahl (wird mit so vielen Nachkommastellen wie die Unsicherheit angegeben).
3. **Unsicherheit (ΔJ)**: eine Zahl (sollte mit höchstens zwei signifikanten Stellen angegeben werden).
4. **Größenordnung**: eine Zehnerpotenz (gleich für Messwert und Unsicherheit).
5. **Einheit**: darf nur fehlen, wenn man tatsächlich eine reine Zahl gemessen hat.

Messwert und Messfehler

Der **Messfehler** (besser: **Messunsicherheit**) gibt die **Genauigkeit** der Messung wieder.

- Kleinerer Fehler = „bessere“ Messung.
- Überprüfung der Verträglichkeit von zwei Messungen möglich.
- Entdeckung, falls (zum ersten Mal) Messwert $\gg$ Messfehler.

Der Messwert allein ist in keinem Fall ausreichend!

Erwartung: Der wahre Wert befindet sich mit hoher Wahrscheinlichkeit innerhalb des Bereichs $[\overline{x} - \Delta x, \overline{x} + \Delta x]$.
(Bzw.: Bei nochmaliger Messung liegt das Ergebnis nicht weit entfernt.)

Diese Wahrscheinlichkeit ist normalerweise $\sim$ 68 %,
d.h. von 10 Messungen erwartet man etwa 3 außerhalb.

Statistischer, systematischer und Gesamtfehler

Es gibt zwei Arten von Unsicherheiten:

1. **Statistischer Fehler**: wird kleiner, wenn man die Messung wiederholt, weil er eine zufällige Streuung der Ergebnisse verursacht.
2. **Systematischer Fehler**: wird nicht direkt kleiner, wenn man die Messung wiederholt, weil er von der Messmethode oder vom Messinstrument verursacht wird. Verlängert man die Datennahme, kann man aber z.B. durch Kalibrationsdaten und Messdaten gleichzeitig statistischen und systematischen Fehler reduzieren.

Für ein Messergebnis $\overline{x} \pm \Delta x_{\text{stat}} \pm \Delta x_{\text{syst}}$ ist der Gesamtfehler

$$\Delta x_{\text{tot}} = \sqrt{(\Delta x_{\text{stat}})^2 + (\Delta x_{\text{syst}})^2} \tag{1}$$

Symbole

Die Symbole, die zur Bezeichnung der physikalischen Größen verwendet werden sind meistens Buchstaben aus dem lateinischen oder dem griechischen Alphabet.

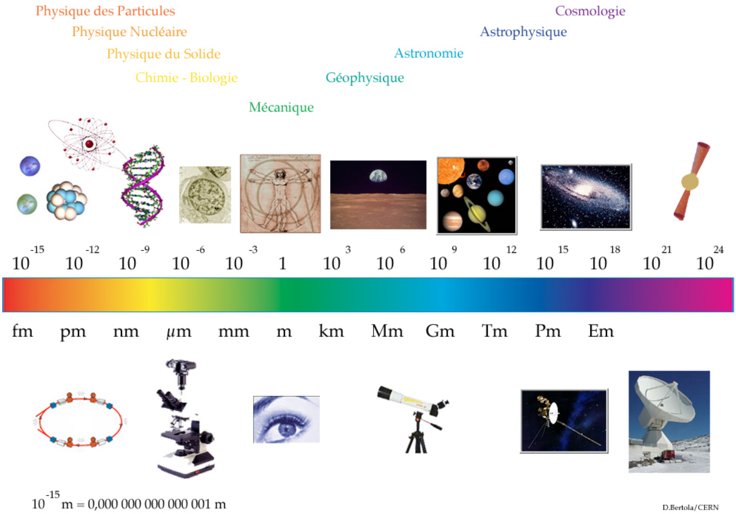
A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Υ	υ	Ypsilon
E	ϵ	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Größenordnungen

Um die Vielfalt der Naturphänomene beschreiben zu können werden Zehnerpotenzen und Dezimalvorsätze benutzt.

10^{-1}	d	Dezi-	10^{1}	da	Deka-
10^{-2}	c	Zenti-	10^{2}	h	Hekto-
10^{-3}	m	Milli-	10^{3}	k	Kilo-
10^{-6}	μ	Mikro-	10^{6}	M	Mega-
10^{-9}	n	Nano-	10^{9}	G	Giga-
10^{-12}	p	Pico-	10^{12}	T	Tera-
10^{-15}	f	Femto-	10^{15}	P	Peta-
10^{-18}	a	Atto-	10^{18}	E	Exa-

Von unendlich klein zu unendlich groß



Maßeinheiten

Ein Einheitensystem ist ein System von Einheiten, das es erlaubt, alle messbaren physikalischen Größen zu quantifizieren.

Das Internationale Einheitensystem (auch SI genannt für "Système International d'Unités") ist das am weitesten verbreitete Einheitensystem für die Physik.

Basiseinheiten

Meter	m	Länge
Kilogramm	kg	Masse
Sekunde	s	Zeit
Ampère	A	El. Strom
Kelvin	K	Temperatur
Candela	cd	Lichtstärke
Mol	mol	Stoffmenge

Abgeleitete Einheiten (Beispiele)

Radiant	rad	m^0	Ebener Winkel
Steradiant	sr	m^0	Raumwinkel
Hertz	Hz	s^{-1}	Frequenz
Newton	N	$m\ kg\ s^{-2}$	Kraft
Pascal	Pa	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	Druck
Joule	J	$m^2\ kg\ s^{-2}$	Energie
Watt	W	$m^2\ kg\ s^{-3}$	Leistung
Coulomb	C	$s\ A$	El. Ladung
Volt	V	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$	El. Spannung
Tesla	T	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$	Magn. Flussdichte

Theorie

Definition

Eine physikalische Theorie ist ein Modell für physikalische Ereignisse, das eine oder mehrere Zusammenhänge zwischen messbaren physikalischen Größen enthält.

Die Güte einer Theorie ist gegeben durch die Übereinstimmung zwischen Vorhersagen und Beobachtungen im Experiment und durch die Fähigkeit neue Vorhersagen daraus zu gewinnen, die wiederum in einem neuen Experiment überprüft werden können.

Physikalische Gesetze erlauben es Größen indirekt zu messen.

Die „Sprache" der physikalischen Gesetze ist die **Mathematik.**

Aussagen und Verknüpfungen

Aussage

Eine Aussage A ist ein Satz, der entweder wahr (w) oder nicht wahr (f) ist. Dies gilt sowohl für einfache als auch für verknüpfte Aussagen.

Logische Aussagen werden mit folgenden Operationen verknüpft:

Negation	$\neg A$	nicht A
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
Implikation	$A \Rightarrow B$	aus A folgt B
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A ist äquivalent zu B

Darstellung mit **Wahrheitstafeln** oder **Schaltern.**

Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln geben den Wahrheitswert einer logischen Operation für alle Kombinationen von Eingangswahrheitswerten an.

Konjunktion:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Disjunktion:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Negation:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Implikation:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w (!)
f	f	w

Äquivalenz:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Grundgesetze der Aussagenlogik

Kommutativgesetze

$$A \land B = B \land A \tag{2}$$
$$A \lor B = B \lor A \tag{3}$$

Assoziativgesetze

$$(A \land B) \land C = A \land (B \land C) \tag{4}$$
$$(A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C) \tag{5}$$

Distributivgesetze

$$(A \lor B) \land C = (A \land C) \lor (B \land C) \tag{6}$$
$$(A \land B) \lor C = (A \lor C) \land (B \lor C) \tag{7}$$

Idempotenzgesetze

$$A \land A = A \tag{8}$$
$$A \lor A = A \tag{9}$$

Absorptionsgesetze

$$A \land (A \lor B) = A \tag{10}$$
$$A \lor (A \land B) = A \tag{11}$$

Ausgeschlossenes Drittes

$$A \land (\neg A) = f \tag{12}$$
$$A \lor (\neg A) = w \tag{13}$$

De Morgansche Regeln

$$\neg(A \land B) = (\neg A) \lor (\neg B) \tag{14}$$
$$\neg(A \lor B) = (\neg A) \land (\neg B) \tag{15}$$

Doppelte Negation

$$\neg(\neg A) = A \tag{16}$$

Direkter Beweis

Direkter Beweis

Es wird von einem bereits als richtig bewiesenen Satz (p) ausgegangen und daraus die Wahrheit des zu beweisenden Satzes (q) abgeleitet.

$$p \Rightarrow q \quad \text{oder} \quad p \Leftrightarrow q \tag{17}$$

Beispiel: Direkter Beweis durch Implikation

Behauptung (q): $\frac{1}{2}(a+b) \leq \sqrt{a \cdot b}$ für alle $a, b > 0$.

Wahrer Satz (p): $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (Binomische Formeln)

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\frac{1}{4}(a+b)^2 \leq a \cdot b$, da $a, b > 0$:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(a+b)^2 - a \cdot b &= \tfrac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2 - 4ab) = \tfrac{1}{4}(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \tfrac{1}{4}(a-b)^2 > 0, \text{ was zu beweisen war.} \end{aligned}$$

Indirekter Beweis

Indirekter Beweis

Um die Behauptung (q) zu beweisen, geht man von der Negation ($\neg\, q$) aus und schließt davon auf eine falsche Aussage (r).

$$\neg\, q \Rightarrow r, \text{ mit } r = \text{f} \tag{18}$$

Beispiel: Indirekter Beweis

Behauptung (q): $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Negation ($\neg\, p$): $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ist rational mit $a, b \in \mathbb{N}$ und a, b teilerfremd.

Implikation: $(\sqrt{2})^2 = 2 = \frac{a^2}{b^2} \;\Rightarrow\; a^2$ ist gerade $\;\Rightarrow\; a = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow\; b^2 = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(2n)^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; b$ ist ebenfalls gerade.

$\Rightarrow\; a$ und b haben den gemeinsamen Teiler 2.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $\;\Rightarrow\; \sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Vollständige Induktion

Mit vollständiger Induktion werden Sätze bewiesen, die für alle natürlichen Zahlen gelten sollen.

Schritte des Beweises

1. Induktionsanfang: Die Aussage wird für $n = n_0$ bewiesen.
2. Induktionsannahme: Es wird angenommen, dass die Aussage für n wahr ist (p).
3. Induktionsbehauptung: Es ist zu zeigen, dass die Aussage für $n + 1$ wahr ist (q).
4. Beweis der Implikation: $p \Rightarrow q$

Da n keine besondere Zahl ist, ist damit die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$ bewiesen.

Vollständige Induktion

Beispiel für vollständige Induktion

Es soll bewiesen werden, dass

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

1. Induktionsanfang: Für $n_0 = 1$ ist $s_1 = \frac{1}{2}$ und die Aussage wahr.
2. Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass $s_n = \frac{n}{n+1}$ wahr ist.
3. Induktionsbehauptung: Zeige, dass $s_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ wahr ist.
4. Beweis der Behauptung:

$$s_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{Induktions-annahme}}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}, \text{ was zu beweisen war.}$$

Mengen, Elemente, Teilmengen

Menge

Eine Menge A ist eine Zusammenfassung bestimmter Objekte a.

Die Objekte a heißen Elemente von A, $a \in A$.

Eine Menge wird durch Aufzählung ihrer Elemente oder durch eine gemeinsame Eigenschaft definiert:

$$M = \{a, b, c\} \quad \text{oder} \quad M = \{a \,|\, a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$$

Teilmenge

A ist Teilmenge von B ($A \subseteq B$), wenn gilt:

$$\forall x \{x \in A \Rightarrow x \in B\} \tag{19}$$

Hat B auch Elemente, die nicht in A vorkommen, so ist A eine echte Teilmenge von B ($A \subset B$).

Operationen mit Mengen

Leere Menge: $\emptyset = \{\}$, enthält kein Element (20)

Vereinigung: $A \cup B = \{x \,|x \in A \vee x \in B\}$ (21)

Durchschnitt: $A \cap B = \{x \,|x \in A \wedge x \in B\}$ (22)

Disjunkte Mengen, wenn gilt: $A \cap B = \emptyset$

Differenz: $A \setminus B = \{x \,|x \in A \wedge x \notin B\}$ (23)

Komplement (bezüglich M mit $A \subseteq M$):

$$C_M(A) = \overline{A} = M \setminus A = \{x \,|x \in M \wedge x \notin A\} \tag{24}$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B = \{x \,|(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \tag{25}$$

Kartesisches Produkt:

$$A \times B = \{(a, b) \,|a \in A \wedge b \in B\} \tag{26}$$

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0 \right\}$

Die arithmetischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) sind für rationale Zahlen mit Ausnahme der Division durch Null immer möglich und liefern im Ergebnis wieder eine rationale Zahl.

Dies gilt nicht für ganze und natürliche Zahlen.

Die Menge der rationalen Zahlen ist überall dicht, d.h. zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert wenigstens eine andere rationale Zahl.

Man kann deswegen die rationalen Zahlen als Punkte einer Gerade darstellen, obwohl nicht jedem Punkt eine Zahl zugeordnet werden kann.

Reelle Zahlen

Manche Zahlen lassen sich nicht als Quotient zweier ganzen Zahlen darstellen. Es sind irrationale Zahlen, die als nichtperiodische unendliche Dezimalbrüche dargestellt werden können.

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} =$ Menge aller rationalen und irrationalen Zahlen

Beispiele

1. algebraische Irrationalitäten: Zahlen der Form $\sqrt[n]{\frac{m+1}{m}}$, $m, n \in \mathbb{N}$.
2. transzendente Zahlen: $\pi = 3,141592\ldots$, $e = 2,718281\ldots$

Weitere Operationen, die auf reellen Zahlen immer möglich sind und als Ergebnis eine reelle Zahl haben:

- Potenzieren mit reellen Exponenten.
- Wurzel ziehen aus jeder positiven Zahl.
- Logarithmus aus jeder positiven Zahl mit positiver Basis $\neq 1$.

Gruppen

Definition

Eine Menge G, versehen mit einer binären Operation $*$, heißt **Gruppe,** wenn

1. für alle $a, b \in G$ auch $a * b \in G$ ein Element der Gruppe ist,
2. die Operation $*$ assoziativ ist,
3. die Gruppe ein neutrales Element e besitzt mit
$$a * e = e * a = a, \tag{27}$$
4. zu jedem Element $a \in G$ ein inverses Element a^{-1} existiert mit
$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e. \tag{28}$$

Wenn die Operation $*$ kommutativ ist, d.h. $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, spricht man von einer **abelschen Gruppe.**

Gruppen

Beispiel: $\mathbb{Z}$ ist eine Gruppe bezüglich der Addition

1. *Abgeschlossenheit*: Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ ist auch $a + b = c \in \mathbb{Z}$.
2. Es gilt das *Assoziativgesetz*: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Es gibt ein *neutrales Element* $e = 0$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ und $0 \in \mathbb{Z}$.
4. Zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}$ gibt es ein *inverses Element* $-a$ mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Achtung: Bezüglich der Multiplikation ist $\mathbb{Z}$ *keine Gruppe*, da es kein inverses Element für alle $a \in \mathbb{Z}$ gibt.

So ist z.B. für $a = 2$ das inverse Element $a^{-1} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.