6. Integralrechnung: Inhalt

6 Integralrechnung

- Bestimmtes Integral
- Integrationstechniken
- Uneigentliche Integrale

Stammfunktion

Definition

$F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn gilt

$$F'(x) = f(x). \tag{87}$$

Die Stammfunktion ist definiert bis auf einer Konstante C, die beim Differenzieren verschwindet.

Die Lösung der Gleichung $F'(x) = f(x)$ für eine gegebene Funktion $f(x)$ ist die Kurvenschar $y = F(x) + C$.

Beispiel: $f(x) = 2x \implies F(x) = x^2$ und $y = x^2 + C$.

Die Konstante C kann erst durch eine Randbedingung festgelegt werden, z.B. $y(a) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

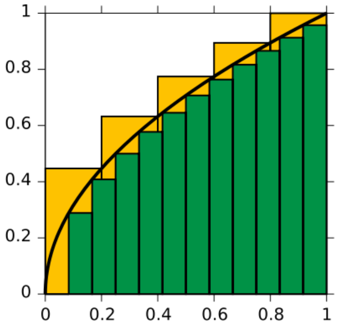
Flächenproblem

Gesucht ist die Fläche A zwischen einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Punkten $x = a$ und $x = b$.

In der Abbildung ist $f(x) = \sqrt{x}$ mit $a = 0$ und $b = 1$.

Eine Näherung ist (mit $\Delta x = (b - a)/n$)

$$A \sim \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x. \qquad (88)$$



Die exakte Fläche erhält man, wenn man unendlich viele, unendlich schmale Rechtecke aufaddiert, d.h.:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (89)$$

Bestimmtes Integral

Definition

Das **bestimmte Integral** von $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b ist

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{90}$$

a heißt untere Integrationsgrenze.

b heißt obere Integrationsgrenze.

$f(x)$ heißt Integrand.

x heißt Integrationsvariable.

F ist eine Zahl und hängt nicht von x ab.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f(t)$ eine stetige, monoton steigende Funktion. Wir betrachten die Fläche als Funktion der oberen Integrationsgrenze

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{91}$$

Bei Verschiebung der rechten Intervallgrenze wächst A um ΔA mit

$$\Delta x \cdot f(x) \;\leq\; \Delta A \;\leq\; \Delta x \cdot f(x + \Delta x). \tag{92}$$

Teilt man durch Δx und berechnet den Grenzwert für $\Delta x \to 0$, so erhält man

$$f(x) \;\leq\; A'(x) \;\leq\; f(x) \quad\Longrightarrow\quad A'(x) \;=\; f(x). \tag{93}$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für $\quad F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ gilt $\quad F'(x) \;=\; f(x)$.

Berechnung des bestimmten Integrals

Die Fläche unter der Kurve $f(x)$ zwischen a und b ist die Differenz zwischen z.B. den Flächen von 0 bis b und von 0 bis a:

Berechnung des bestimmten Integrals

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [\,F(x)\,]_a^b \;=\; F(b) - F(a) \tag{94}$$

Eigenschaften:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{95}$$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{96}$$

$$\int_a^b (\lambda\, f(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{97}$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{98}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall $a \le x \le b$ stetig ist, dann gibt es einen ξ aus diesem Intervall mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(\xi)(b-a) \tag{99}$$

Aus der Stetigkeit folgt $m \le f(x) \le M$ für alle $a \le x \le b$. Integriert man alle drei Terme, so erhält man

$$m(b-a) \;\le\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; M(b-a)$$

und der Mittelwertsatz muss gelten

Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x)$	$F(x)$
x^a	$\frac{1}{a+1}\, x^{a+1} + C$
$\frac{1}{x^a} \quad (a \neq 1)$	$-\frac{1}{(a-1)\, x^{a-1}} + C$
$\frac{1}{x}$	$-\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\ln x$	$x\,(\ln x - 1) + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

$f(x)$	$F(x)$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$
$\tanh x$	$\ln\cosh x + C$
$\coth x$	$\ln\lvert\sinh x\rvert + C$

Stammfunktionen und Integrationsregeln

Für kompliziertere Funktionen gibt es eine Reihe von Regeln, z.B.:

Substitutionsregel: $$\int_a^b f\big(g(t)\big)\, g'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Logarithmische Integration: $$\int \tfrac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln|f(x)| + C$$

Partielle Integration: $$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung:

Rationaler Integrand der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit $Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ mit reellen und einfachen Wurzeln x_i und Grad $P <$ Grad Q. Dann ist

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x - x_i}\right)\mathrm{d}x \;=\; \sum_{i=1}^{n} A_i \ln|x - x_i| + C.$$

Beispiele zu Integrationstechniken

Beispiel: Substitutionsregel (1)

Zu lösen sei das Integral $\displaystyle\int_0^a \sin(2t)\,dt$ (mit $a > 0$).

$$\Longrightarrow\quad \int_0^a \sin(2t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\int_0^a \sin(2t)\cdot 2\,\mathrm{d}t \quad \text{mit } f(x)=\sin x,\ g(t)=2t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a f\big(g(t)\big)\,g'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(a)} f\big(g(t)\big)(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sin x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=2a}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\cos(2a)-(-\cos 0)\Big) \;=\; \frac{1}{2}\Big(1-\cos(2a)\Big) \;=\; \sin^2 a.$$

Etwas einfacher: Setze $u = g(t) = 2t \;\Longrightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2 \;\Longrightarrow\; \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$

$$\Longrightarrow\quad \int_0^a \sin(2t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(a)} \sin u\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^{2a}\sin u\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \;=\; \cdots$$

Beispiele zu Integrationstechniken

Beispiel: Substitutionsregel (2)

Zu lösen sei das Integral $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx$.

- Setze $u = \sqrt{2x-1} \implies 2x-1 = u^2 \implies x = \frac{1}{2}(u^2+1)$.

$$\implies x'(u) = \frac{dx}{du} = \frac{1}{2}\cdot 2\,u = u \implies dx = u\,du.$$

- Untere Integrationsgrenze ($x_1 = 1$):

$$u_1 = \sqrt{2x_1 - 1} = \sqrt{2\cdot 1 - 1} = 1.$$

- Obere Integrationsgrenze ($x_2 = 5$):

$$u_2 = \sqrt{2x_2 - 1} = \sqrt{2\cdot 5 - 1} = 3.$$

$$\implies \int_1^5 \sqrt{2x-1}\,dx = \int_{u(1)}^{u(5)} u\cdot u\,du = \int_1^3 u^2\,du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^3 = \mathbf{\frac{26}{3}}.$$

Beispiele zu Integrationstechniken

Die Substitutionsregel ist besonders praktisch, wenn die Ableitung schon im Integranden steckt.

Beispiel: Substitutionsregel (3)

Zu lösen sei das Integral $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$.

1. Substitution: Setze $u = 2 + x^2 \implies \frac{du}{dx} = 2x \implies dx = \frac{du}{2x}$.
2. Integral lösen: $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$.
3. Rücksubstitution: $\sqrt{u} + C = \sqrt{2+x^2} + C$.
4. Grenzen einsetzen:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx = \left[\sqrt{2+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{3} - \sqrt{2} \simeq \mathbf{0{,}3178}.$$

Beispiele zu Integrationstechniken

Beispiel: Logarithmische Integration

Zu lösen sei das Integral $\int \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}$.

Setze $f(x) = x^2 + 3x + 5$, dann ist $f'(x) = 2x + 3x$ und es folgt mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}t \;=\; \int \frac{(x^2+3x+5)'}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}t \;=\; \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}| + \boldsymbol{C}.$$

Beispiel: Partielle Integration

Zu lösen sei das Integral $\int \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$.

Setze $u(x) = x$, $v'(x) = e^x \implies u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$ und:

$$\int x\,e^x\,\mathrm{d}x \;=\; \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \; x\,e^x - \int 1\cdot e^x\,\mathrm{d}x \;=\; (\boldsymbol{x} - \mathbf{1})\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}.$$

Beispiele zu Integrationstechniken

Beispiel: Partialbruchzerlegung (1)

Zu lösen sei das Integral $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

1. Nullstellen des Nenners:
$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x-1)(x+2)$$
2. Partialbruchzerlegung: $\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\quad 2x+3 &= A_1 \cdot (x-1)(x+2) + A_2 \cdot x(x+2) + A_3 \cdot x(x-1) \\
&= A_1 x^2 + A_1 x - 2\,A_1 + A_2 x^2 + 2\,A_2 x + A_3 x^2 - A_3 x \\
&= \underbrace{(A_1 + A_2 + A_3)}_{=0}\, x^2 + \underbrace{(A_1 + 2\,A_2 - A_3)}_{=2}\, x - \underbrace{2\,A_1}_{=3}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad A_3 = -\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} A_2 + A_3 &= \frac{3}{2} \\ 2\,A_2 - A_3 &= \frac{7}{2} \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad A_2 = \frac{5}{3}, \quad A_3 = -\frac{1}{6}.$$

Beispiele zu Integrationstechniken

3. Lösen des Integrals:

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A_1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A_2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A_3}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\tfrac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \tfrac{5}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \tfrac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$$

$$= \boldsymbol{-\tfrac{3}{2}\ln|x| + \tfrac{5}{3}\ln|x-1| - \tfrac{1}{6}\ln|x+2| + C}.$$

Voraussetzungen für Partialbruchzerlegungen:

- Grad des Nenners (hier: 3) $>$ Grad des Zählers (hier: 2).
- Nenner hat ausschließlich reelle Nullstellen (hier: 0, 1 und -2). Bei mehrfachen Nullstellen muss man die Zerlegung etwas anders durchführen, s. Beispiel folgende Seite.

Beispiele zu Integrationstechniken

Beispiel: Partialbruchzerlegung (2)

Zu lösen sei das Integral $\int \frac{\boldsymbol{x^3+1}}{\boldsymbol{x(x-1)^3}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{x}$.

Partialbruchzerlegung: $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} + \frac{A_4}{(x-1)^3}$

$$\Longrightarrow \; A_1\,(x-1)^3 + A_2\,x(x-1)^2 + A_3\,x(x-1) + A_4\,x$$

$$= A_1x^3 - 3A_1x^2 + 3A_1x - A_1 + A_2x^3 - 2A_2x^2 + A_2x + A_3x^2 - A_3x + A_4x$$

$$= (A_1+A_2)x^3 - (3A_1+2A_2-A_3)x^2 + (3A_1+A_2-A_3+A_4)x - A_1 \stackrel{!}{=} x^3+1$$

$\Longrightarrow$ löse lineares Glgs.system $\Longrightarrow$ $A_1 = -1,\ A_2 = 2,\ A_3 = 1,\ A_4 = 2.$

Integration: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^3}$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

Definition und Rechenvorschrift

Uneigentliche Integrale sind Integrale, bei denen sich entweder eine der Integrationsgrenzen ins Unendliche erstreckt oder der Integrand singulär wird.

Ein uneigentliches Integral mit unendlicher oberer Grenze oder mit einer Singularität bei der oberen Grenze wird wie folgt berechnet:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{t\to b\\ t<b}} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{100}$$

Wenn der Grenzwert existiert, sagt man, dass das uneigentliche Integral konvergiert.

Beispiele für uneigentliche Integrale

Beispiele: Uneigentliche Integrale

- $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t$$
  $$= \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t}+1\right) = \mathbf{1.}$$

- $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^t$$
  $$= \lim_{\substack{t\to1\\t<1}}\left(-2\sqrt{1-t}+2\right) = \mathbf{2.}$$