7. Komplexe Zahlen: Inhalt

Imaginäre Einheit und komplexe Zahlen

Die Wurzel aus einer negativen Zahl ist keine reelle Zahl.

Wir führen dazu einen neuen Zahlentyp ein, dessen Quadrat immer eine negative reelle Zahl gibt: die **imaginären Zahlen.**

Imaginäre Einheit

Die Zahl i ist die Einheit der imaginären Zahlen.
Sie hat die Eigenschaft $i^2 = -1$.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** ist die Summe einer reellen und einer imaginären Zahl:

$$z = x + iy \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{C} \text{ und } x, y \in \mathbb{R} \tag{101}$$

$x = Re(z)$ heißt Realteil von z.

$y = Im(z)$ heißt Imaginärteil von z.

Konjugiert komplexe Zahl

Definition

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $z^\star$ erhält man, wenn man i durch $-i$ ersetzt:

$$z^\star = x - iy \tag{102}$$

Der **Betrag** von $z = x + iy$ ist definiert als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ oder

$$|z| = \sqrt{zz^\star} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{103}$$

- z ist rein reell, wenn $z = z^\star$.
- z ist rein imaginär, wenn $z = -z^\star$.

Rechenregeln

Summe:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{104}$$

Differenz:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{105}$$

Produkt:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{106}$$

Quotient:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^\star}{z_2 z_2^\star} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{107}$$

Es gelten die üblichen Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze für Addition und Multiplikation wie bei den reellen Zahlen.

Rechenregeln

Beispiel für das Rechnen mit komplexen Zahlen

Seien $z_1 = 3 + 2\,i$ und $z_2 = 1 - i$ gegeben. Dann sind:

- Die konjugiert komplexen Zahlen $z_1^\star = 3 - 2\,i$ und $z_2^\star = 1 + i$.
- Die Beträge $|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ und $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- Die Summe $z_1 + z_2 = (3+1) + (2-1)\,i = 4 + i$.
- Die Differenz $z_1 - z_2 = (3-1) + (2+1)\,i = 2 + 3\,i$.
- Das Produkt $z_1\,z_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + \big(3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2\big) i = 5 - i$.
- Der Quotient $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + \big(3\cdot(-1) - 1\cdot 2\big)\,i}{1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\,i$.

Die gaußsche Zahlenebene

Komplexe Zahlen können als Punkte in der gaußschen bzw. komplexen Zahlenebene dargestellt werden.

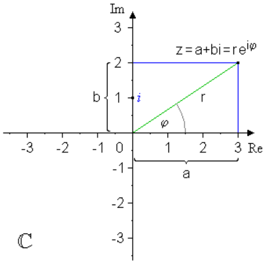
Die x-Achse heißt reelle Achse.

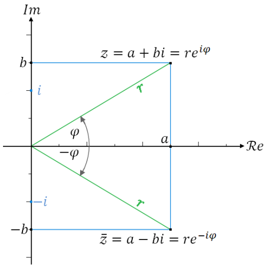
Die y-Achse heißt imaginäre Achse.

Die Koordinaten sind der Realteil und der Imaginärteil von z.

Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen entsprechen Addition und Subtraktion von Vektoren.

Die zu z konjugiert komplexe Zahl z^* ist an der reellen Achse gespiegelt.





Polardarstellung und Eulersche Formel

Die komplexe Zahl $z = x + iy$ kann auch als

$$z = r \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) \tag{108}$$

dargestellt werden, mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \arctan\frac{y}{x}. \tag{109}$$

Das ist äquivalent zur **Polardarstellung**

$$z = r\, e^{i\alpha} \tag{110}$$

mit derselben Definition von r und α, denn es gilt

Eulersche Formel

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{111}$$

Daraus folgen: $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)$ und $\sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$.

Operationen in der Polardarstellung

Produkt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\, r_2\, e^{\,i(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{112}$$

Quotient:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{\,i(\alpha_1-\alpha_2)} \tag{113}$$

Potenz:

$$z^n = r^n\, e^{\,in\alpha} \tag{114}$$

Wurzel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{\,i\frac{\alpha}{n}} \tag{115}$$

Für Addition und Subtraktion müssen die Additionstheoreme der Trigonometrie verwendet werden.