Lineare Gleichungssysteme

Ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}\,x_1 + & \ldots & + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + & \ldots & + a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \right. \tag{129}$$

kann in der kompakteren Form

$$A\,\vec{x} \;=\; \vec{b} \tag{130}$$

als Multiplikation einer Koeffizientenmatrix mit dem aus den Unbekannten gebildeten Vektor dargestellt werden.

Eine eindeutige Lösung existiert nur, wenn $|A| \neq 0$, und ist

$$\vec{x} \;=\; A^{-1}\,\vec{b}. \tag{131}$$

Lösung von linearen Gleichungssystemen

Zwei Möglichkeiten, ein lineares Gleichungssystem zu lösen:

1. Lösung der Gleichung $\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$

   $\Longrightarrow$ Bilden der inversen Matrix A^{-1}.

   Vorteil: Definiertes Vorgehen, kann gut automatisiert werden.

   Nachteil: Unter Umständen sehr mühsam.

2. Sukzessive Reduktion der Zahl der Gleichungen und Variablen

   $\Longrightarrow$ Bilden von Linearkombinationen der n Gleichungen.

   Beispiel: Bilde $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten durch

   $$(\text{Glg.}\,i) \to (\text{Glg.}\,i) - a_{in}/a_{nn} \cdot (\text{Glg.}\,n) \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n-1)} \tag{132}$$

   usw., bis x_1 bestimmt ist und eingesetzt werden kann.

   Vorteil: Eignet sich vor allem beim Lösen per Hand, da dann geeignete Linearkombinationen gefunden werden können.

Lösung von linearen Gleichungssystemen

Beispiel: Lösung eines linearen Gleichungssystems

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3\,x_1 + 4\,x_2 - 5\,x_3 &= 1 \qquad (1)\\ x_1 - 2\,x_2 + x_3 &= 2 \qquad (2)\\ 2\,x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \qquad (3)\end{aligned}$$

1. Das lineare Gleichungssystem ist identisch mit

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (s. Beispiel Seite 129/130) und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \underbrace{-\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 7 & -8 \\ 5 & 5 & -10 \end{pmatrix}}_{\text{s. Beispiel Seite 129/130}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 - 2 - 18 \\ 3 + 14 - 24 \\ 5 + 10 - 30 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}}.$$

Lösung von linearen Gleichungssystemen

2. Eliminiere ein x_i nach dem anderen. Hier zuerst x_2:

Glg. $(1) + 2 \cdot$ Glg. (2):

$$\Longrightarrow \quad (3+2\cdot 1)\,x_1 + (4-2\cdot 2)\,x_2 + (-5+2\cdot 1)\,x_3 = 1+2\cdot 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 5\,x_1 - 3\,x_3 = 5 \qquad (4)$$

Glg. $(2) + 2 \cdot$ Glg. (3):

$$\Longrightarrow \quad (1+2\cdot 2)\,x_1 + (-2+2\cdot 1)\,x_2 + (1+2\cdot(-1))\,x_3 = 2+2\cdot 3$$

$$\Longleftrightarrow \quad 5\,x_1 - x_3 = 8 \qquad (5)$$

Es sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten übrig. Eliminiere nun x_1:

Glg. $(4) -$ Glg. (5):

$$\Longrightarrow \quad (5-5)\,x_1 + (-3-(-1))\,x_2 = 5-8$$

$$\Longleftrightarrow \quad -2\,x_3 = -3 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = \frac{3}{2}.$$

Setze nun x_3 in Glg. (5) und dann x_1 und x_3 in Glg. (3) ein

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = \frac{19}{10}}, \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{7}{10}}, \quad \boldsymbol{x_3 = \frac{3}{2} = \frac{15}{10}}.$$

Koordinatentransformationen

Im Allgemeinen werden Vektoren als physikalische Objekte betrachtet.
Sie bleiben unverändert, aber ihre Komponentendarstellung ändert sich je nach Auswahl des Koordinatensystems.

Eine “Vektortransformation” ist der Einfluss der Koordinatentransformation auf die Komponentendarstellung eines Vektors.

Da Vektoren durch ihre Länge und Richtung definiert sind, haben Verschiebungen des Nullpunkts des Koordinatensystems keinen Einfluss auf ihre Koordinatendarstellung.

$\Longrightarrow$ **Wir betrachten nur Drehungen des Koordinatensystems.**

Drehmatrizen

Das alte Koordinatensystem sei gegeben durch $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots$ und das neue, gedrehte System durch $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots$ mit gleichem Ursprung.

Ortsvektor im alten/neuen System: $$\vec{x} = \sum_i x_i \, \vec{e}_i = \sum_i x'_i \, \vec{e}'_i \quad (133)$$

Koordinaten im neuen System: $$x'_i = \vec{x} \cdot \vec{e}'_i = \sum_j x_j \left(\vec{e}_j \, \vec{e}'_i \right) \quad (134)$$

Elemente der Drehmatrix: $$d_{ij} := \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \cos \vartheta_{ij} \quad (135)$$

Drehung: $$x'_i = \sum_j d_{ij} \, x_j \quad (136)$$

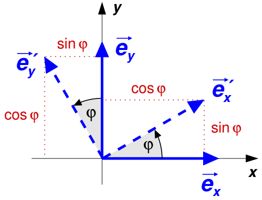
- Glg. (135) ist die Definition der Drehmatrix: jedes Element ist der Winkel zwischen einem neuen und einem alten Basisvektor.
- Glg. (136) ist die gesuchte Vektortransformation unter Drehung des Koordinatensystems. In der kompakten Form:

$$\vec{x}' = D \, \vec{x} \quad (137)$$

Drehungen im $\mathbb{R}^2$

Drehmatrix bei Drehung um Winkel φ:

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (138)$$



Koordinatentransformation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \implies \vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = D\,\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi \\ -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (139)$$

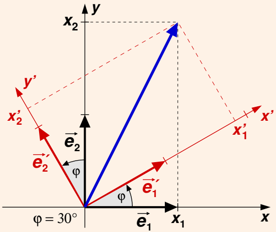
Eigenschaften:

1. Länge der Vektoren bleiben unverändert.
2. Neue Basis ist orthonormiert, d.h. $\vec{e}_i^{\,\prime}\,\vec{e}_j^{\,\prime} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$

Drehungen im $\mathbb{R}^2$

Beispiel: Drehung um $\varphi = 30°$

Der 2-dimensionale Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll in ein um 30° im Uhrzeigersinn gedrehtes Koordinatensystem transformiert werden. Elemente der Drehmatrix:



$$
\begin{aligned}
d_{11} &= \vec{e}\,'_1 \cdot \vec{e}_1 = \cos\varphi &&= \cos 30° &&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
d_{22} &= \vec{e}\,'_2 \cdot \vec{e}_2 = \cos\varphi &&= \cos 30° &&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \\
d_{12} &= \vec{e}\,'_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \varphi\right) &&= \sin 30° &&= \tfrac{1}{2} \\
d_{21} &= \vec{e}\,'_2 \cdot \vec{e}_1 = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \varphi\right) &&= -\sin 30° &&= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.
$$

$\Longrightarrow$ Koordinaten von $\vec{x}$ im neuen, gestrichenen System:

$$
\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} d_{11}\,x_1 + d_{12}\,x_2 \\ d_{21}\,x_1 + d_{22}\,x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 \\ -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.
$$

Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Räumliche Drehungen des Koordinatensystems im $\mathbb{R}^3$ lassen sich immer auf 2-dimensionale Drehungen um die Koordinatenachsen zurückführen:

- Drehung um die x-Achse: $D_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
- Drehung um die y-Achse: $D_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
- Drehung um die z-Achse: $D_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Drehungen um eine beliebige Achse können aus aufeinander folgenden Drehungen D_x, D_y und D_z zusammengesetzt werden.

Eigenschaften von Drehmatrizen

Definition

Eine quadratische Matrix A mit reellen Einträgen heißt **orthogonale Matrix**, wenn ihr Inverses gleich der transponierten Matrix ist:

$$A^{-1} = A^T \quad \text{bzw.} \quad A\,A^T = \mathbb{1}. \tag{140}$$

Eigenschaften von orthogonalen Matrizen:

- Bei einer Transformation bleibt der Betrag erhalten: $|A\,\vec{x}| = |\vec{x}|$.
- Ebenso bleibt das Skalarprodukt gleich: $(A\,\vec{x}) \cdot (B\,\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.
- Die Determinante ist ± 1.

Orthogonale Matrizen mit Determinante $+1$ sind Drehungen.

Orthogonale Matrizen mit Determinante -1 sind Drehspiegelungen.

Matrizentransformation

Unter Drehung des Koordinatensystems geht die Matrixgleichung $\vec{y} = A\,\vec{x}$ über in die entsprechende Gleichung $\vec{y}\,' = A'\,\vec{x}\,'$ mit

$$\vec{y}\,' = D\,\vec{y} = D\,A\,\vec{x} = D\,A\,D^{-1}\,\vec{x}\,' = A'\,\vec{x}\,' \tag{141}$$

Da Drehmatrizen orthogonal sind, ist $D^T\,D = \mathbb{1}$, also $D^{-1} = D^T$.

Matrixtransformation

$$A' = D\,A\,D^{-1} = D\,A\,D^T \tag{142}$$

$$a'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} d_{ik}\,d_{jl}\,a_{kl} \tag{143}$$

Eine quadratische Matrix ist ein Tensor 2. Stufe.