Näherung einer Funktion um einen Punkt

Als erste Näherung kann eine stetige und differenzierbare Funktion um einen Punkt x_0 durch die Tangente in x_0 ersetzt werden:

$$y \;=\; f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{85}$$

Die Näherung wird besser, wenn man höhere Ableitungen mitnimmt:

Taylor-Entwicklung

Die Funktion $f(x)$ kann um x_0 durch

$$f(x) \;\approx\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{86}$$

genähert werden, wenn die Reihe konvergiert, d.h. der Grenzwert

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

existiert.

Beispiele für Taylorentwicklungen

Beispiel: Taylorentwicklung eines Polynoms um $x_0 = 0$

Ein Polynom 2. Grades ist gegeben durch $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$.

1. Ableitung: $f'(x) = 2ax + b$

2. Ableitung: $f''(x) = 2a$, höhere Ableitungen $f'''(x) = f^{(4)}(x) = \cdots = 0$.

1. Näherung: $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) = f(0) + x \cdot f'(0) = c + b\,x$.

2. Näherung: $f(x) \approx f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) = c + b\,x + \frac{x^2}{2} \cdot 2a$

$= ax^2 + bx + c =$ ursprüngliche Funktion!

Beispiel: Taylorentwicklung von e^x um $x_0 = 0$

Exponentialfunktion: $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, $f(x_0 = 0) = 1$.

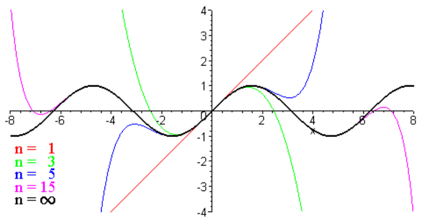
Ableitungen: $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x \implies$ alle $f^{(n)}(0) = 1$.

$\implies$ Taylorreihe: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (Definition der e-Funktion!)

Beispiele für Taylorentwicklungen

Beispiel: Taylorentwicklung von $\sin x$ um $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$



Taylorreihe: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1!)} x^{2n+1}$.

Da die Fakultät im Nenner für $n \to \infty$ immer schneller wächst als die Potenz im Zähler, konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$

Konvergenz der Taylorreihe

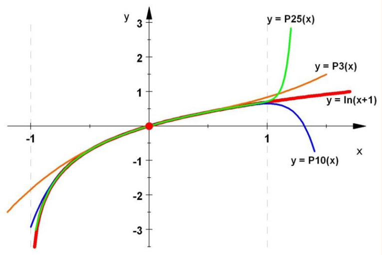
Die Taylor-Entwicklung bis zur Ordnung n ist nur in der Nähe von x_0 eine gute Näherung.

Die Taylorreihe (mit unendlich vielen Termen) konvergiert manchmal nur in einem beschränkten Konvergenz- oder Gültigkeitsbereich.

Beispiel: Taylorentwicklung von $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{1+x}, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \tfrac{2}{(1+x)^3}, & f'''(0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(1+x) = x - \tfrac{x}{2} + \tfrac{x^2}{3} + - \cdots = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n.$$



$\Longrightarrow$ Taylorreihe von $\ln(1+x)$ konvergiert nur für $-1 \leq x \leq 1$.

Anwendungen der Taylor-Entwicklung

- **Nullstellensuche**
  Die Gleichung $f(x) = 0$ ist manchmal nicht analytisch lösbar.
  Stattdessen kann man die Nullstellen annähern:
  1. Starte mit einem Wert x_1 in der Nähe einer Nullstelle.
  2. Nähere $f(x)$ durch die Tangente $f(x) \sim f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ an, die die Nullstelle $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ hat.
  3. Wiederhole das Verfahren mit x_2 als neuem Schätzwert, usw.

Beispiel: Nullstelle von $f(x) = x^2 - 10$

Wahre Nullstelle: $\boldsymbol{x_0 = \sqrt{10} = 3{,}1622777\ldots}$, Ableitung: $f'(x) = 2x$.

$$
\begin{aligned}
\text{Setze } x_1 = 3 \implies x_2 &= 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} &&= 3 - \frac{-1}{6} &&= 3{,}167 \\
\implies x_3 &= 3{,}167 - \frac{f(3{,}167)}{f'(3{,}167)} &&= 3{,}167 - \frac{0{,}028}{6{,}333} &&= 3{,}162281 \\
\implies x_4 &= \cdots &&= 3{,}162281 - \frac{0{,}00002}{6{,}3246} &&= \mathbf{3{,}1622776\ldots}
\end{aligned}
$$

Anwendungen der Taylor-Entwicklung

- **Grenzwerte**
  Analog zur Regel von de l'Hôpital kann man für die Bestimmung eines Grenzwerts die Funktion durch ihre Taylorreihe ersetzen.

Beispiele: Grenzwerte mit Taylorreihe

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \cdots}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{5!} + - \cdots\right) = \mathbf{1.}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n - 1}{x}$$
  $$= \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^{n-1} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^0}{1!} + \frac{x^1}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right) = \mathbf{1.}$$

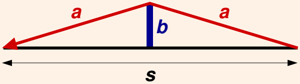
Anwendungen der Taylor-Entwicklung

- Vereinfachung von Problemen

  Ersetze komplizierte Funktionen durch das Näherungspolynom.

Beispiel: Umwegproblem

Der direkte Weg s ist durch ein Hindernis der Breite $b \ll s$ blockiert. Wie groß ist der neue Weg $W = 2a$ als Funktion von b?



Es gilt $a^2 = (\frac{s}{2})^2 + b^2$ (Pythagoras). Setze außerdem $x := \frac{2b}{s}$.

$$\Longrightarrow \quad W(b) = 2\,a = 2\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + b^2} = s\sqrt{1+\left(\frac{2b}{s}\right)^2} = s\sqrt{1+x^2} \equiv W(x)$$

$$\Longrightarrow \quad W'(x) = \frac{s\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{s\,x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad W''(x) = \frac{s\sqrt{1+x^2} - s\,x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{s}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}$$

$$\Longrightarrow \quad W(x) \overset{x\approx 0}{\approx} W(0) + x\cdot W'(0) + \frac{x^2}{2}\cdot W''(0)$$

$$= s + x\cdot 0 + \frac{x^2}{2}\cdot s = s + \frac{1}{2}\left(\frac{2b}{s}\right)^2\cdot s = s\left(1+\frac{2}{s^2}\,b^2\right).$$