10. Wahrscheinlichkeitsrechnung: Inhalt

Grundlegende Begriffe

Elementarereignis: Verschiedene (paarweise disjunkte) mögliche Ausgänge eines Zufallsexperiments.

Ereignisraum E: Menge aller möglichen Elementarereignisse des Experiments.

Ereignis A: Eine Teilmenge des Ereignisraums, z.B. ein Elementarereignis oder eine Zusammenfassung von Elementarereignissen.

Komplementäres Ereignis: Ereignis aus der komplementären Teilmenge von A bezüglich E.

Unmögliches Ereignis O: Ereignis, das durch kein Elementarereignis erfüllt ist .

Definitionen der Wahrscheinlichkeit

Klassische Definition:

Der Ereignisraum E besteht aus n gleich möglichen Elementarereignissen und n_A davon erfüllen das Ereignis A. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A ist

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \tag{170}$$

Statistische Definition:

Notwendig, wenn die Elementarereignisse nicht gleich wahrscheinlich sind. Es werden n Experimente unter gleichen Bedingung durchgeführt und n_i davon führen zu dem Ereignis A_i. Die Wahrscheinlichkeit wird dann der empirisch bestimmten relativen Häufigkeit gleichgesetzt:

$$P(A_i) = \frac{n_i}{n} \tag{171}$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Grundlegende Eigenschaften:

$$P(O) = 0 \quad \text{und} \quad P(E) = 1 \tag{172}$$

Negation:

$$P(\text{nicht } A) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{173}$$

Oder:

$$P(A \text{ oder } B) = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B) \tag{174}$$

Und:

$$P(A \text{ und } B) = P(A \wedge B) = \begin{cases} P(A) \cdot P(B) & A, B \text{ unabhängig} \\ P(A) \cdot P(B|A) & A, B \text{ nicht unabhängig} \end{cases} \tag{175}$$

($P(B|A)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für B, falls A eintrifft.)

Zwei Ereignisse heißen disjunkt, wenn sie sich ausschließen, d.h.

$$P(A \wedge B) = 0$$
$$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiele

Oder-Verknüpfung:

Gegeben sei ein Skatspiel mit 32 Karten (4 Farben $\times$ 8 Werte). Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ass oder ein Karo gezogen wird?

$$P(\text{Ass oder Karo}) = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{Ass}} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Karo}} - \underbrace{\frac{1}{32}}_{\text{Karo-Ass}} = \frac{11}{32}.$$

Und-Verknüpfung:

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, dass zwei Menschen an einem bestimmten Tag oder am gleichen Tag Geburtstag haben?

$$P(\text{bestimmtes Datum}) = \underbrace{\frac{1}{365}}_{\substack{\text{Person 1}\\\text{an Datum}}} \times \underbrace{\frac{1}{365}}_{\substack{\text{Person 2}\\\text{an Datum}}} = \frac{1}{365^2} \simeq 7{,}5 \times 10^{-6}.$$

$$P(\text{gleiches Datum}) = \underbrace{1}_{\substack{\text{Person 1}\\\text{irgendwann}}} \times \underbrace{\frac{1}{365}}_{\substack{\text{Person 2}\\\text{wenn Person 1}}} = \frac{1}{365} \simeq 0{,}27\,\%.$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Ziegenproblem

In einer Spielshow gibt es drei geschlossene Türen. Hinter zweien steht eine Ziege, hinter einer ein Ferrari. Es passiert Folgendes:

1. Der Kandidat tippt auf eine Tür.
2. Der Moderator (*"Ich zeig' Ihnen mal was"*) öffnet Tür mit einer Ziege.

Soll der Kandidat seine ursprünglich getippte Tür wechseln?

Lösung:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wurde Tür 1 gewählt.

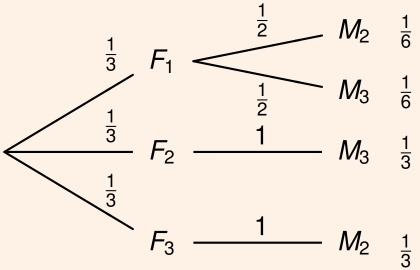
Drei Fälle $i = 1, 2, 3$ für den Ferrari: F_1, F_2, F_3 (Index gibt die Tür an.)
Drei Fälle $j = 1, 2, 3$ für den Moderator: M_1, M_2, M_3

$\Longrightarrow$ 9 Fälle, davon fallen weg: Moderator öffnet Autotür ($j \neq i$),
Moderator öffnet getippte Tür ($j \neq 1$).

$\Longrightarrow$ Übrig bleiben 4 Fälle: (F_1, M_2), (F_1, M_3), (F_2, M_3), (F_3, M_2).

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

$\Longrightarrow$ 4 Fälle übrig, aber nicht alle gleich wahrscheinlich:



$\Longrightarrow$ Tür 1 geöffnet:

Wahrscheinlichkeit für A_2 doppelt so groß wie für A_1.

Ebenso für A_3.

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} P(\text{Tür beibehalten}) &= \tfrac{1}{3} \\ P(\text{Tür wechseln}) &= \tfrac{2}{3} \end{aligned} \quad \Longrightarrow$$

Wechseln ist besser!

Warum? Der Ferrari hat sich nicht verschoben, aber es ist mehr Information vorhanden!

Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

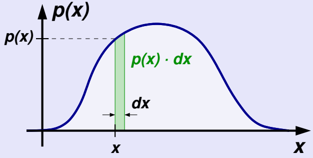
Definition

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist eine Funktion $p(x)$, für die gilt:

$p(x)\,\mathrm{d}x$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert im Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ liegt.

Die Funktion ist so normiert, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad (176)$$



$p(x)$ ist eine Dichte, weil sie über einen Bereich integriert werden muss, um eine Wahrscheinlichkeit darzustellen.

$p(x)$ ist NICHT die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert gleich x ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert zwischen x und x liegt, ist 0!

Kombinatorik

- Zahl der unterschiedlichen Reihenfolgen für n voneinander verschiedene Elemente:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 \;=\; n! \tag{177}$$

Beispiel

Für die Buchstaben A, B und C gibt es $3! \;=\; 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 6$ Anordnungen: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Für den 1. Buchstaben gibt es drei Möglichkeiten, danach zwei für den 2. Buchstaben und nur eine für den Letzten.

Kombinatorik

- Zahl der unterschiedlichen Reihenfolgen für n Elemente, von denen jeweils $k_1, k_2, \ldots, k_m$ Elemente gleich sind:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!} \tag{178}$$

("MISSISSIPPI-Formel")

Beispiel

Das Wort MISSISSIPPI hat $n = 11$ Buchstaben, davon kommen I und S jeweils $k_1 = k_2 = 4$-mal und P $k_3 = 2$-mal vor. Die Zahl der unterschiedlichen Anordnungen ist damit

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39\,916\,800}{24 \cdot 24 \cdot 2} = 34\,650.$$

Kombinatorik

- Zahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen bei beliebiger Reihenfolge ohne Zurücklegen:

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} =: \binom{n}{k} \tag{179}$$

Beispiel: Lotto "6 aus 49"

Die Zahl der Möglichkeiten, $k = 6$ Zahlen nacheinander aus $n = 49$ Zahlen zu ziehen, ist

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\,(49-6)!} = 13\,983\,816.$$

Den Ausdruck $\binom{n}{k}$ nennt man **Binomialkoeffizient**.

Kombinatorik

- Zahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen bei Berücksichtigung der Reihenfolge ohne Zurücklegen:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \binom{n}{k} \tag{180}$$

- Zahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen bei Berücksichtigung der Reihenfolge mit Zurücklegen:

$$n^k \tag{181}$$